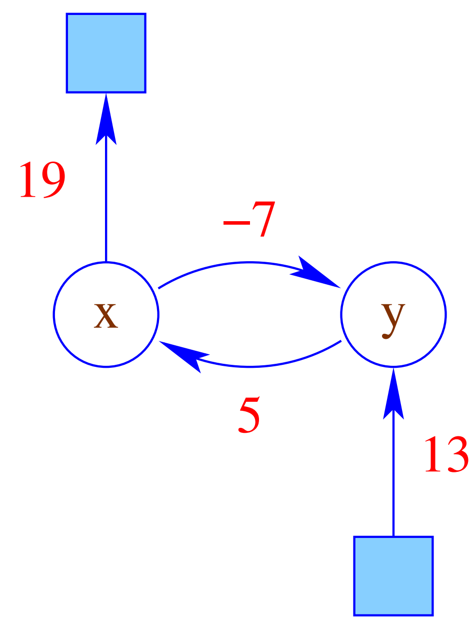
## 2. Ein polynomieller Spezialfall:

$$\begin{array}{rcr} & x \geq & y+5 \\ 19 \geq & x & \\ & y \geq & 13 \\ & y \geq & x-7 \end{array}$$

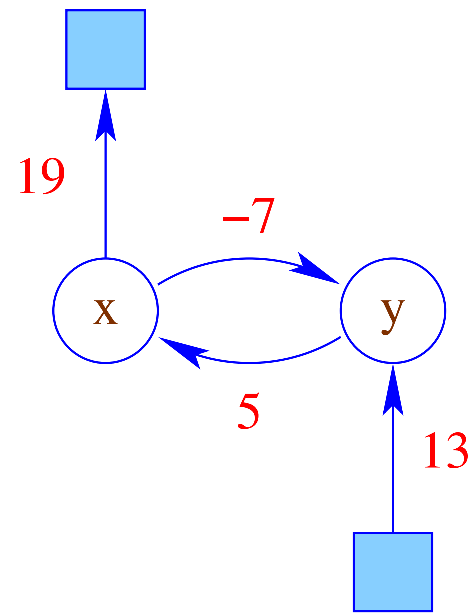
- Es gibt maximal zwei Variablen pro Un-Gleichung;
- keine Skalierungsfaktoren.

**Idee:** Representiere das System als Graph:

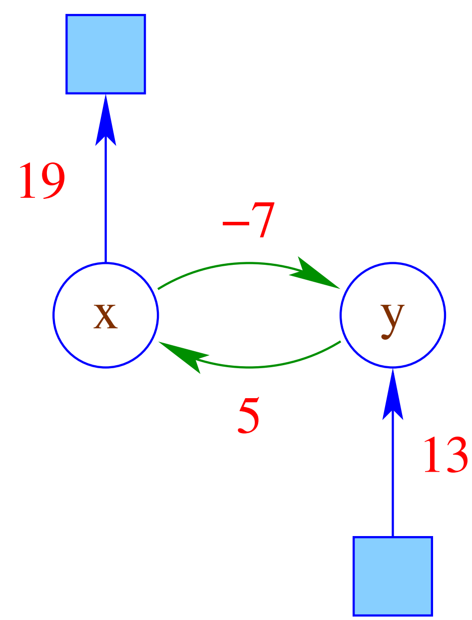


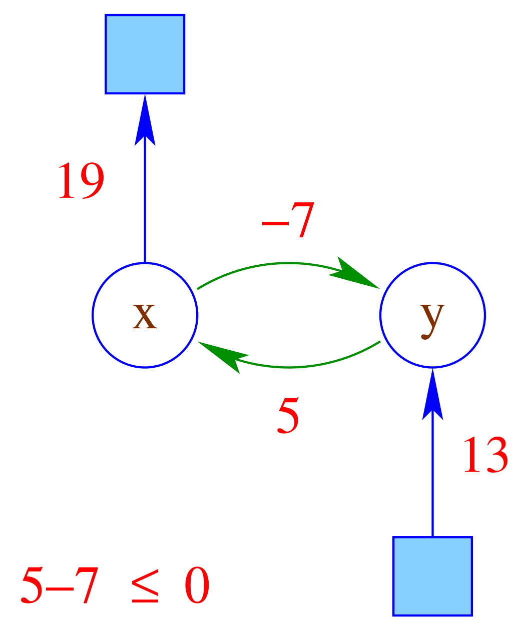
Die Ungleichungen sind erfüllbar genau dann wenn

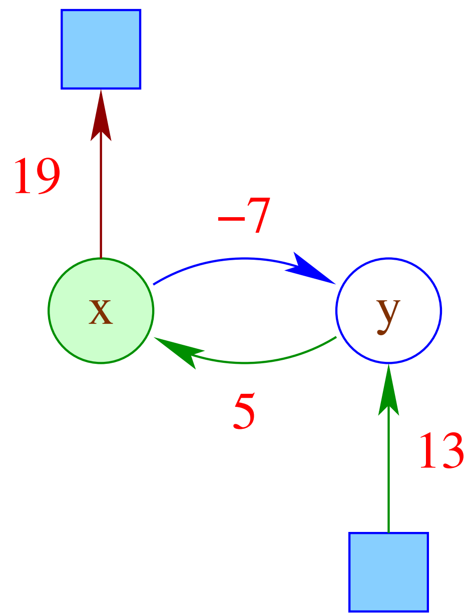
- die Gewichte jedes Kreises maximal $\leq 0$ sind;
- die Gewichte, die $x$ erreichen, maximal $\leq$ der Gewichte sind, die $x$ verlassen.

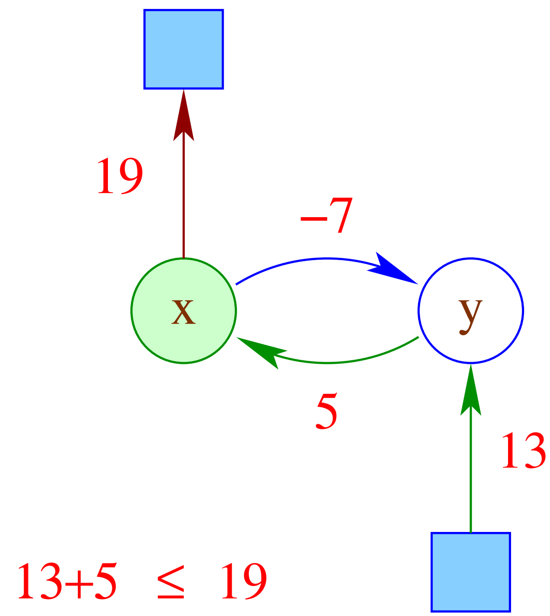


19
−7
x
y
5
13


19
−7
x
y
5
13


19
−7
x
y
5
13
5−7 ≤ 0


19
−7
x
y
5
13


19
−7
x
y
5
13
13+5 ≤ 19

Die Ungleichungen sind erfüllbar genau dann wenn

- die Gewichte jedes Kreises maximal $\leq 0$ sind;
- die Gewichte, die $x$ erreichen, maximal $\leq$ der Gewichte sind, die $x$ verlassen.

reflexive und transitive Hülle der Kanten-Gewichte!

## 3. Ein allgemeines Lösungsverfahren:

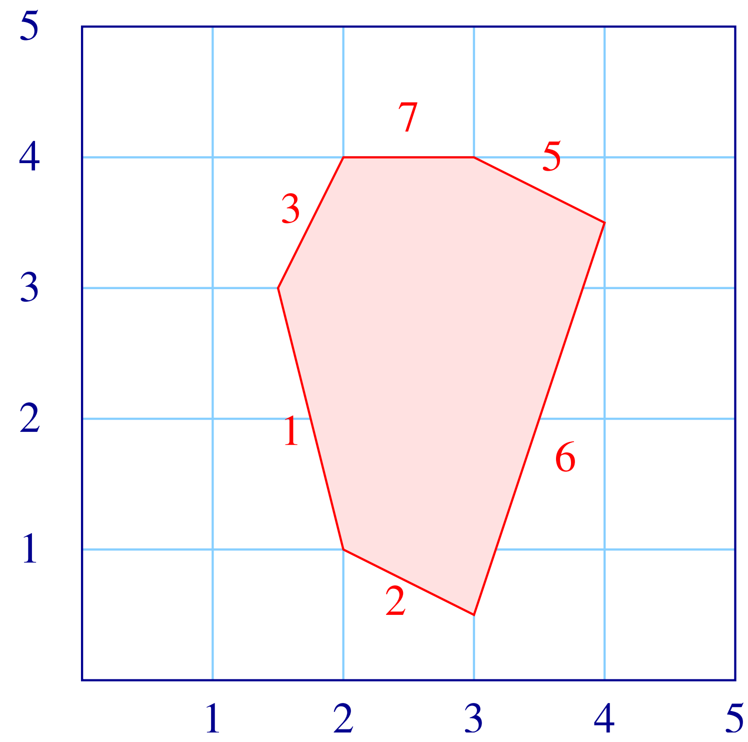
**Idee:** Fourier-Motzkin-Elimination

- Beseitige sukzessive einzelne Variablen $x$ !
- Alle Ungleichungen mit positiven Vorkommen von $x$ liefern untere Schranken.
- Alle Ungleichungen mit negativen Vorkommen von $x$ liefern obere Schranken.
- Alle unteren Schranken müssen kleiner oder gleich allen oberen Schranken sein ;-))

Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830

## Beispiel:

$$
\begin{array}{lll l}
9 & \leq & 4x_1 + x_2 & (1) \\
4 & \leq & x_1 + 2x_2 & (2) \\
0 & \leq & 2x_1 - x_2 & (3) \\
6 & \leq & x_1 + 6x_2 & (4) \\
-11 & \leq & -x_1 - 2x_2 & (5) \\
-17 & \leq & -6x_1 + 2x_2 & (6) \\
-4 & \leq & -x_2 & (7)
\end{array}
$$



Für $x_1$ finden wir:

$$
\begin{array}{rcll}
9 & \leq & 4x_1 + x_2 & (1) \\
4 & \leq & x_1 + 2x_2 & (2) \\
0 & \leq & 2x_1 - x_2 & (3) \\
6 & \leq & x_1 + 6x_2 & (4) \\
-11 & \leq & -x_1 - 2x_2 & (5) \\
-17 & \leq & -6x_1 + 2x_2 & (6) \\
-4 & \leq & -x_2 & (7)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcll}
\frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_2 & \leq & x_1 & (1) \\
4 - 2x_2 & \leq & x_1 & (2) \\
\frac{1}{2}x_2 & \leq & x_1 & (3) \\
6 - 6x_2 & \leq & x_1 & (4) \\
x_1 & \leq & 11 - 2x_2 & (5) \\
x_1 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (6) \\
-4 & \leq & -x_2 & (7)
\end{array}
$$

Wenn es ein solches $x_1$ gibt, müssen alle unteren Schranken kleiner gleich allen oberen sein, d.h.:

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{9}{4}-\frac{1}{4}x_2 & \leq & 11-2x_2 & (1,5) \\
\frac{9}{4}-\frac{1}{4}x_2 & \leq & \frac{17}{6}+\frac{1}{3}x_2 & (1,6) \\
4-2x_2 & \leq & 11-2x_2 & (2,5) \\
4-2x_2 & \leq & \frac{17}{6}+\frac{1}{3}x_2 & (2,6) \\
\frac{1}{2}x_2 & \leq & 11-2x_2 & (3,5) \\
\frac{1}{2}x_2 & \leq & \frac{17}{6}+\frac{1}{3}x_2 & (3,6) \\
6-6x_2 & \leq & 11-2x_2 & (4,5) \\
6-6x_2 & \leq & \frac{17}{6}+\frac{1}{3}x_2 & (4,6) \\
-4 & \leq & -x_2 & (7)
\end{array}
$$

oder:

$$
\begin{array}{rcll}
-35 & \leq & -7x_2 & (1,5) \\
-\frac{7}{12} & \leq & \frac{7}{12}x_2 & (1,6) \\
-7 & \leq & 0 & (2,5) \\
\frac{7}{6} & \leq & \frac{7}{3}x_2 & (2,6) \\
-22 & \leq & -5x_2 & (3,5) \\
-\frac{17}{6} & \leq & -\frac{1}{6}x_2 & (3,6) \\
-5 & \leq & 4x_2 & (4,5) \\
\frac{19}{6} & \leq & \frac{19}{3}x_2 & (4,6) \\
-4 & \leq & -x_2 & (7)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_2 & \leq & 11 - 2x_2 & (1,5) \\
\frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_2 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (1,6) \\
4 - 2x_2 & \leq & 11 - 2x_2 & (2,5) \\
4 - 2x_2 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (2,6) \\
\frac{1}{2}x_2 & \leq & 11 - 2x_2 & (3,5) \\
\frac{1}{2}x_2 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (3,6) \\
6 - 6x_2 & \leq & 11 - 2x_2 & (4,5) \\
6 - 6x_2 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (4,6) \\
-4 & \leq & -x_2 & (7)
\end{array}
\qquad \text{oder:} \qquad
\begin{array}{rcll}
-5 & \leq & -x_2 & (1,5) \\
-1 & \leq & x_2 & (1,6) \\
-7 & \leq & 0 & (2,5) \\
\frac{1}{2} & \leq & x_2 & (2,6) \\
-\frac{22}{5} & \leq & -x_2 & (3,5) \\
-17 & \leq & -x_2 & (3,6) \\
-\frac{5}{4} & \leq & x_2 & (4,5) \\
\frac{1}{2} & \leq & x_2 & (4,6) \\
-4 & \leq & -x_2 & (7)
\end{array}
$$

Das ist der Ein-Variablen-Fall, den wir exakt lösen können:

$$\max\{-1, \boxed{\tfrac{1}{2}}, -\tfrac{5}{4}, \tfrac{1}{2}\} \quad \leq \quad x_2 \quad \leq \quad \min\{5, \tfrac{22}{5}, 17, \boxed{4}\}$$

Daraus können wir folgern: $\quad x_2 \in [\frac{1}{2}, 4] \quad$ :-)

## Im Allgemeinen:

- Das ursprüngliche System hat eine Lösung in $\mathbb{Q}$, gdw. das System nach Eliminierung einer Variable eine Lösung in $\mathbb{Q}$ besitzt :-)
- In jedem Eliminierungsschritt kann sich die Anzahl der Ungleichungen quadrieren $\Longrightarrow$ exponentielle Laufzeit :-((
- Es lässt sich so modifizieren, dass es Erfüllbarkeit über $\mathbb{Z}$ entscheidet $\Longrightarrow$ Omega-Test

William Worthington Pugh, Jr.
University of Maryland, College Park

## Idee:

- Wir beseitigen sukzessive die Variablen. Dabei müssen wir allerdings Divisionen vermeiden ...
- Hat $x$ überall Koeffizienten $\pm 1$, machen wir Fourier-Motzkin-Elimination :-)
- Andernfalls stellen wir $x$ auf einer Seite mit positivem Koeffizienten frei ...

Betrachten wir etwa $(1)$ und $(6)$ :

$$\begin{array}{rcl} 6 \cdot x_1 & \leq & 17 + 2x_2 \\ 9 - x_2 & \leq & 4 \cdot x_1 \end{array}$$

E.O. können wir echte Ungleichungen betrachten:

$$\begin{aligned} 6 \cdot x_1 &< 18 + 2x_2 \\ 8 - x_2 &< 4 \cdot x_1 \end{aligned}$$

... und jeweils durch den ggT teilen:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 &< 9 + x_2 \\ 8 - x_2 &< 4 \cdot x_1 \end{aligned}$$

Das impliziert:

$$3 \cdot (8 - x_2) < 4 \cdot (9 + x_2)$$

## Offenbar gilt:

- Ist die abgeleitete Ungleichung unerfüllbar, dann das ganze System :-)
- Sind alle so abgeleiteten Ungleichungen erfüllbar, gibt es eine Lösung, die aber möglicherweise nicht ganzzahlig ist :-(
- Es gibt aber eine ganzzahlige Lösung, sofern zwischen unterer und oberer Schranke stets genug Platz ist, so dass ein Integer dazwischen passt.
- Sei $\alpha < a \cdot x \qquad\qquad b \cdot x < \beta$ .

  Dann muss nicht nur gelten:

$$b \cdot \alpha < a \cdot \beta$$

  sondern sogar

$$\boxed{a \cdot b} < a \cdot \beta - b \cdot \alpha$$

... im Beispiel:

$$12 \quad < \quad 4 \cdot (9 + x_2) - 3 \cdot (8 - x_2)$$

oder:

$$12 \quad < \quad 12 + 7x_2$$

bzw:

$$0 \quad < \quad x_2$$

Im Beispiel lassen sich auch diese verschärften Ungleichungen erfüllen

$\Longrightarrow$ das System hat über $\mathbb{Z}$ eine Lösung :-)

# Überlegung:

- Sind die verschärften Ungleichungen erfüllbar, dann auch das ursprüngliche System. Die Umkehrung gilt i.A. nicht :-(
- In dem Fall ist bei einem Paar Ungleichungen weniger Platz:

$$a \cdot \beta \leq b \cdot \alpha + \boxed{a \cdot b}$$

oder:

$$b \cdot \alpha < ab \cdot x < b \cdot \alpha + \boxed{a \cdot b}$$

Kürzen durch $b$ liefert:

$$\alpha < a \cdot x < \alpha + \boxed{a}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\alpha + i = a \cdot x}$ für ein $i \in \{1, \ldots, a - 1\}$ !!!

## Diskussion:

→ Fourier-Motzkin-Elimination ist nicht das beste Verfahren für rationale Ungleichungssysteme.

→ Der Omega-Test ist notwendig exponentiell :-)

Wenn das System lösbar ist, terminiert der Test i.a. schnell.

Mit unlösbaren Systemen tut er sich schwerer :-(

→ Auch für ILP gibt es andere/intelligentere Verfahren ...

→ Für Probleme bei Programmiersprachen funktioniert er wohl ganz gut :-)

## 4. Verallgemeinerung zu einer Logik

### Disjunktion:

$$
\begin{array}{lll}
(x - 2y = 15 & \wedge & x + y = 7) \qquad \vee \\
(x + y = 6 & \wedge & 3x + z = -8)
\end{array}
$$

### Quantoren:

$$\exists\, x : \quad z - 2x = 42 \quad \wedge \quad z + x = 19$$

## 4. Verallgemeinerung zu einer Logik

### Disjunktion:

$$\begin{array}{llll} (x - 2y = 15 & \wedge & x + y = 7) & \vee \\ (x + y = 6 & \wedge & 3x + z = -8) & \end{array}$$

### Quantoren:

$$\exists\, x : \quad z - 2x = 42 \quad \wedge \quad z + x = 19$$

$\Longrightarrow$ Presburger Arithmetik

Mojzesz Presburger, 1904–1943 (?)

Presburger Arithmetik $=$ normale Arithmetik ohne Multiplikation

| | | |
|---|---|---|
| Presburger Arithmetik | $==$ | normale Arithmetik<br>ohne Multiplikation |

| | | |
|---|---|---|
| Arithmetik | : | hochgradig unentscheidbar :-(<br>sogar sogar unvollständig :-(( |

| | | |
|---|---|---|
| Presburger Arithmetik | $==$ | normale Arithmetik<br>ohne Multiplikation |

| | | |
|---|---|---|
| Arithmetik | : | hochgradig unentscheidbar :-(<br>sogar sogar unvollständig :-(( |
| | $\Longrightarrow$ | Hilberts 10tes Problem |
| | $\Longrightarrow$ | Gödels Theorem |

# Presburger Formeln:

$$\begin{array}{lcl} \phi & ::= & x + y = z \quad \mid \quad x = n \quad \mid \\ & & \phi_1 \wedge \phi_2 \quad \mid \quad \neg \phi \quad \mid \\ & & \exists\, x : \quad \phi \end{array}$$

## Presburger Formeln:

$$\begin{array}{lll} \phi & ::= & x + y = z \quad | \quad x = n \quad | \\ & & \phi_1 \wedge \phi_2 \quad | \quad \neg\phi \quad | \\ & & \exists\, x : \quad \phi \end{array}$$

## Ziel: PSAT

Finde Werte in $\mathbb{N}$ für die freien Variablen, so dass $\phi$ gilt ...

**Idee:** Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 213 | t | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 42 | z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 89 | y | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 17 | x | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

**Idee:** Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 213 | t | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 42 | z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 89 | y | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 17 | x | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

**Idee:** Codiere die Werte der Variablen als **Worte** :-)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 213 | $t$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 42 | $z$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 89 | $y$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 17 | $x$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

**Idee:** Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 213 | t | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 42 | z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 89 | y | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 17 | x | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

**Idee:** Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 213 | t | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 42 | z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 89 | y | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 17 | x | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

**Idee:** Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 213 | t | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 42 | z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 89 | y | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 17 | x | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

**Idee:** Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 213 | t | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 42 | z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 89 | y | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 17 | x | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

**Idee:** Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 213 | t | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 42 | z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 89 | y | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 17 | x | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

**Idee:** Codiere die Werte der Variablen als **Worte** :-)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 213 | t | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 42 | z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 89 | y | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 17 | x | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

**Idee:** Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 213 | t | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 42 | z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 89 | y | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 17 | x | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Beobachtung:

Die Menge der erfüllenden Variablenbelegungen ist regulär :-))

## Beobachtung:

Die Menge der erfüllenden Variablenbelegungen ist regulär :-))

$$
\begin{array}{llll}
\phi_1 \wedge \phi_2 & \Longrightarrow & \mathcal{L}(\phi_1) \cap \mathcal{L}(\phi_2) & (\text{Durchschnitt}) \\
\neg \phi & \Longrightarrow & \overline{\mathcal{L}(\phi)} & (\text{Komplement}) \\
\exists\, x : \quad \phi & \Longrightarrow & \pi_x(\mathcal{L}(\phi)) & (\text{Projektion})
\end{array}
$$

Weg-Projizierung der $x$-Komponente:

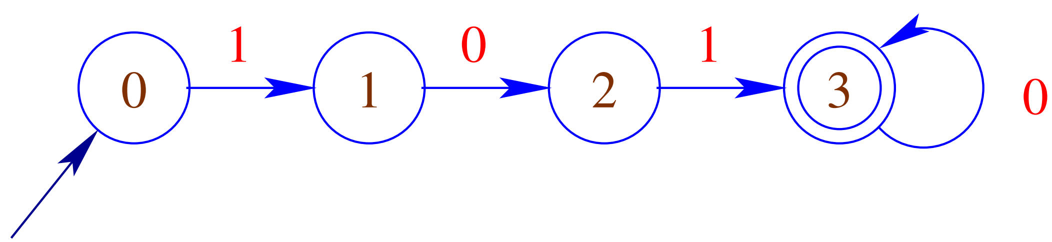
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 213 | t | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 42 | z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 89 | y | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 17 | x | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Weg-Projizierung der $x$-Komponente:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 213 | t | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 42 | z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 89 | y | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

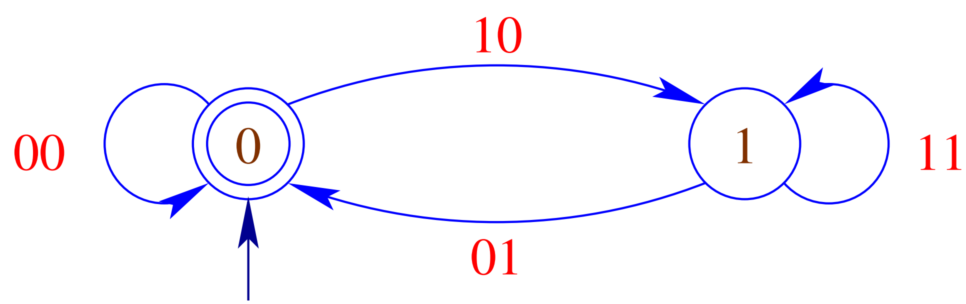
# Automaten für Basis-Prädikate:

$$x = 5$$



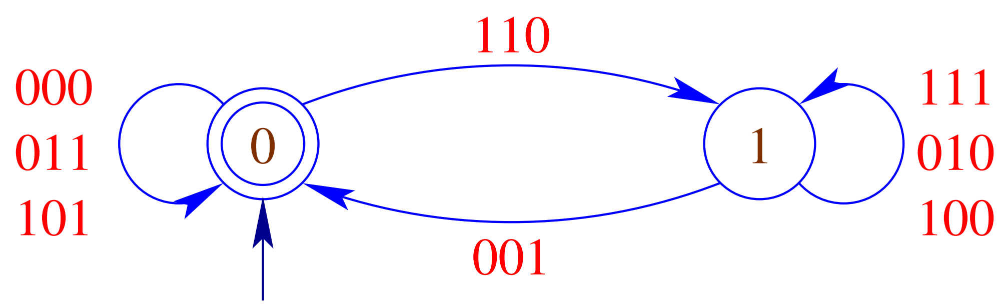
## Automaten für Basis-Prädikate:

$$x+x = y$$



## Automaten für Basis-Prädikate:

$x+y = z$



Ergebnisse:

Ferrante, Rackoff,1973 : $\text{PSAT} \leq \text{DSPACE}(2^{2^{c \cdot n}})$

Ergebnisse:

Ferrante, Rackoff,1973 : $\text{PSAT} \leq \text{DSPACE}(2^{2^{c \cdot n}})$

Fischer, Rabin,1974 : $\text{PSAT} \geq \text{NTIME}(2^{2^{c \cdot n}})$