

Wir suchen **Lösungen** für Constraint-Systeme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (*)$$

Wir suchen **Lösungen** für Constraint-Systeme der Form:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (*)$$

wobei:

$x_i$	Unbekannte	hier:	$\mathcal{A}[u]$
$\mathbb{D}$	Werte	hier:	$2^{Expr}$
$\sqsubseteq \subseteq \mathbb{D} \times \mathbb{D}$	Ordnungsrelation	hier:	$\supseteq$
$f_i: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}$	Bedingung	hier:	...

Wir suchen **Lösungen** für Constraint-Systeme der Form:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (*)$$

wobei:

$x_i$	Unbekannte	hier:	$\mathcal{A}[u]$
$\mathbb{D}$	Werte	hier:	$2^{Expr}$
$\sqsubseteq \subseteq \mathbb{D} \times \mathbb{D}$	Ordnungsrelation	hier:	$\supseteq$
$f_i: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}$	Bedingung	hier:	...

Constraint für  $\mathcal{A}[v]$ :

$$\mathcal{A}[v] \subseteq \bigcap \{ \llbracket k \rrbracket^\# (\mathcal{A}[u]) \mid k = (u, \_ , v) \text{ Kante} \}$$

Wir suchen **Lösungen** für Constraint-Systeme der Form:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (*)$$

wobei:

$x_i$	Unbekannte	hier: $\mathcal{A}[u]$
$\mathbb{D}$	Werte	hier: $2^{Expr}$
$\sqsubseteq \subseteq \mathbb{D} \times \mathbb{D}$	Ordnungsrelation	hier: $\supseteq$
$f_i: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}$	Bedingung	hier: ...

Constraint für  $\mathcal{A}[v]$ :

$$\mathcal{A}[v] \subseteq \bigcap \{ \llbracket k \rrbracket^\# (\mathcal{A}[u]) \mid k = (u, \_, v) \text{ Kante} \}$$

**Denn:**

$$x \sqsupseteq d_1 \wedge \dots \wedge x \sqsupseteq d_k \quad \text{gdw.} \quad x \sqsupseteq \sqcup \{d_1, \dots, d_k\} \quad :-)$$

Eine Abbildung  $f : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2$  heißt **monoton**, falls  
 $f(a) \sqsubseteq f(b)$  für alle  $a \sqsubseteq b$ .



Eine Abbildung  $f : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2$  heißt **monoton**, falls  $f(a) \sqsubseteq f(b)$  für alle  $a \sqsubseteq b$ .

## Beispiele:

- (1)  $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$  für eine Menge  $U$  und  $f(x) = (x \cap a) \cup b$ .  
Offensichtlich ist jedes solche  $f$  monoton :-)

Eine Abbildung  $f : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2$  heißt **monoton**, falls  $f(a) \sqsubseteq f(b)$  für alle  $a \sqsubseteq b$ .

## Beispiele:

(1)  $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$  für eine Menge  $U$  und  $f x = (x \cap a) \cup b$ .

Offensichtlich ist jedes solche  $f$  monoton :-)

(2)  $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}$  (mit der Ordnung " $\leq$ "). Dann gilt:

- $\text{inc } x = x + 1$  ist monoton.
- $\text{dec } x = x - 1$  ist monoton.

Eine Abbildung  $f : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2$  heißt **monoton**, falls  $f(a) \sqsubseteq f(b)$  für alle  $a \sqsubseteq b$ .

## Beispiele:

(1)  $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$  für eine Menge  $U$  und  $f x = (x \cap a) \cup b$ .

Offensichtlich ist jedes solche  $f$  monoton :-)

(2)  $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}$  (mit der Ordnung " $\leq$ "). Dann gilt:

- $\text{inc } x = x + 1$  ist monoton.
- $\text{dec } x = x - 1$  ist monoton.
- $\text{inv } x = -x$  ist **nicht monoton** :-)

## Satz:

Sind  $f_1 : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2$  und  $f_2 : \mathbb{D}_2 \rightarrow \mathbb{D}_3$  monoton, dann ist  
auch  $f_2 \circ f_1 : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_3$  monoton :-)

### Satz:

Sind  $f_1 : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2$  und  $f_2 : \mathbb{D}_2 \rightarrow \mathbb{D}_3$  monoton, dann ist auch  $f_2 \circ f_1 : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_3$  monoton :-)

### Satz:

Ist  $\mathbb{D}_2$  ein vollständiger Verband, dann bildet auch die Menge  $[\mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2]$  der monotonen Funktionen  $f : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2$  einen vollständigen Verband, wobei

$$f \sqsubseteq g \quad \text{gdw.} \quad f x \sqsubseteq g x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{D}_1$$

### Satz:

Sind  $f_1 : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2$  und  $f_2 : \mathbb{D}_2 \rightarrow \mathbb{D}_3$  monoton, dann ist auch  $f_2 \circ f_1 : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_3$  monoton :-)

### Satz:

Ist  $\mathbb{D}_2$  ein vollständiger Verband, dann bildet auch die Menge  $[\mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2]$  der monotonen Funktionen  $f : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2$  einen vollständigen Verband, wobei

$$f \sqsubseteq g \text{ gdw. } f x \sqsubseteq g x \text{ für alle } x \in \mathbb{D}_1$$

Insbesondere ist für  $F \subseteq [\mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2]$ ,

$$\bigsqcup F = f \text{ mit } f x = \bigsqcup \{g x \mid g \in F\}$$

Für Funktionen  $f_i x = a_i \cap x \cup b_i$  können wir die Operationen “ $\circ$ ”, “ $\sqcup$ ” und “ $\sqcap$ ” explizit angeben:

$$(f_2 \circ f_1) x = a_1 \cap a_2 \cap x \cup a_2 \cap b_1 \cup b_2$$

$$(f_1 \sqcup f_2) x = (a_1 \cup a_2) \cap x \cup b_1 \cup b_2$$

$$(f_1 \sqcap f_2) x = (a_1 \cup b_1) \cap (a_2 \cup b_2) \cap x \cup b_1 \cap b_2$$

**Gesucht:** möglichst **kleine** Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (*)$$

wobei alle  $f_i : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}$  monoton sind.



**Gesucht:** möglichst **kleine** Lösung für:

$$x_i \supseteq f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (*)$$

wobei alle  $f_i : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}$  monoton sind.

**Idee:**

- Betrachte  $F : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  mit

$$F(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \quad \text{wobei} \quad y_i = f_i(x_1, \dots, x_n).$$

**Gesucht:** möglichst **kleine** Lösung für:

$$x_i \supseteq f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (*)$$

wobei alle  $f_i : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}$  monoton sind.

**Idee:**

- Betrachte  $F : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  mit

$$F(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \quad \text{wobei} \quad y_i = f_i(x_1, \dots, x_n).$$

- Sind alle  $f_i$  monoton, dann auch  $F$  :-)

**Gesucht:** möglichst **kleine** Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (*)$$

wobei alle  $f_i : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}$  monoton sind.

**Idee:**

- Betrachte  $F : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  mit

$$F(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \quad \text{wobei} \quad y_i = f_i(x_1, \dots, x_n).$$

- Sind alle  $f_i$  monoton, dann auch  $F$  :-)
- Wir **approximieren** sukzessive eine Lösung. Wir konstruieren:

$$\underline{\quad}, \quad F \underline{\quad}, \quad F^2 \underline{\quad}, \quad F^3 \underline{\quad}, \quad \dots$$

**Hoffnung:** Wir erreichen irgendwann eine Lösung ... ???

Beispiel:

$$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq = \subseteq$$

$$x_1 \supseteq \{a\} \cup x_3$$

$$x_2 \supseteq x_3 \cap \{a,b\}$$

$$x_3 \supseteq x_1 \cup \{c\}$$

Beispiel:

$$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq = \subseteq$$

$$x_1 \supseteq \{a\} \cup x_3$$

$$x_2 \supseteq x_3 \cap \{a, b\}$$

$$x_3 \supseteq x_1 \cup \{c\}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
$x_1$	$\emptyset$				
$x_2$	$\emptyset$				
$x_3$	$\emptyset$				

Beispiel:

$$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq = \subseteq$$

$$x_1 \supseteq \{a\} \cup x_3$$

$$x_2 \supseteq x_3 \cap \{a, b\}$$

$$x_3 \supseteq x_1 \cup \{c\}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
$x_1$	$\emptyset$	$\{a\}$			
$x_2$	$\emptyset$	$\emptyset$			
$x_3$	$\emptyset$	$\{c\}$			

Beispiel:

$$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq = \subseteq$$

$$x_1 \supseteq \{a\} \cup x_3$$

$$x_2 \supseteq x_3 \cap \{a, b\}$$

$$x_3 \supseteq x_1 \cup \{c\}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
$x_1$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, c\}$		
$x_2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
$x_3$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{a, c\}$		

Beispiel:

$$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq = \subseteq$$

$$x_1 \supseteq \{a\} \cup x_3$$

$$x_2 \supseteq x_3 \cap \{a, b\}$$

$$x_3 \supseteq x_1 \cup \{c\}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
$x_1$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	
$x_2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	
$x_3$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	



Beispiel:

$$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq = \subseteq$$

$$x_1 \supseteq \{a\} \cup x_3$$

$$x_2 \supseteq x_3 \cap \{a, b\}$$

$$x_3 \supseteq x_1 \cup \{c\}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
$x_1$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	dito
$x_2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	
$x_3$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	

## Offenbar gilt:

- Gilt  $F^k \underline{\perp} = F^{k+1} \underline{\perp}$ , ist eine Lösung gefunden :-)
- $\underline{\perp}, F \underline{\perp}, F^2 \underline{\perp}, \dots$  bilden eine **aufsteigende Kette** :  
$$\underline{\perp} \sqsubseteq F \underline{\perp} \sqsubseteq F^2 \underline{\perp} \sqsubseteq \dots$$
- Sind **alle** aufsteigenden Ketten endlich, gibt es  **$k$**  immer.

## Offenbar gilt:

- Gilt  $F^k \underline{\perp} = F^{k+1} \underline{\perp}$ , ist eine Lösung gefunden :-)
- $\underline{\perp}, F \underline{\perp}, F^2 \underline{\perp}, \dots$  bilden eine **aufsteigende Kette** :  
$$\underline{\perp} \sqsubseteq F \underline{\perp} \sqsubseteq F^2 \underline{\perp} \sqsubseteq \dots$$
- Sind **alle** aufsteigenden Ketten endlich, gibt es  **$k$**  immer.

Die zweite Aussage folgt mit **vollständiger Induktion**:

## Offenbar gilt:

- Gilt  $F^k \underline{\perp} = F^{k+1} \underline{\perp}$ , ist eine Lösung gefunden :-)
- $\underline{\perp}, F \underline{\perp}, F^2 \underline{\perp}, \dots$  bilden eine **aufsteigende Kette** :  
$$\underline{\perp} \sqsubseteq F \underline{\perp} \sqsubseteq F^2 \underline{\perp} \sqsubseteq \dots$$
- Sind **alle** aufsteigenden Ketten endlich, gibt es  **$k$**  immer.

Die zweite Aussage folgt mit **vollständiger Induktion**:

**Anfang:**  $F^0 \underline{\perp} = \underline{\perp} \sqsubseteq F^1 \underline{\perp}$  :-)

## Offenbar gilt:

- Gilt  $F^k \underline{\perp} = F^{k+1} \underline{\perp}$ , ist eine Lösung gefunden :-)
- $\underline{\perp}, F \underline{\perp}, F^2 \underline{\perp}, \dots$  bilden eine **aufsteigende Kette** :  
$$\underline{\perp} \sqsubseteq F \underline{\perp} \sqsubseteq F^2 \underline{\perp} \sqsubseteq \dots$$
- Sind **alle** aufsteigenden Ketten endlich, gibt es  **$k$**  immer.

Die zweite Aussage folgt mit **vollständiger Induktion**:

**Anfang:**  $F^0 \underline{\perp} = \underline{\perp} \sqsubseteq F^1 \underline{\perp}$  :-)

**Schluss:** Gelte bereits  $F^{i-1} \underline{\perp} \sqsubseteq F^i \underline{\perp}$ . Dann

$$F^i \underline{\perp} = F (F^{i-1} \underline{\perp}) \sqsubseteq F (F^i \underline{\perp}) = F^{i+1} \underline{\perp}$$

da  $F$  monoton ist :-)

Fazit:

Wenn  $D$  endlich ist, finden wir mit Sicherheit eine Lösung :-)

Fragen:

## Fazit:

Wenn  $\mathbb{D}$  endlich ist, finden wir mit Sicherheit eine Lösung :-)

## Fragen:

1. Gibt es eine kleinste Lösung ?

## Fazit:

Wenn  $\mathbb{D}$  endlich ist, finden wir mit Sicherheit eine Lösung :-)

## Fragen:

1. Gibt es eine kleinste Lösung ?
2. Wenn ja: findet Iteration die kleinste Lösung ??



## Fazit:

Wenn  $\mathbb{D}$  endlich ist, finden wir mit Sicherheit eine Lösung :-)

## Fragen:

1. Gibt es eine kleinste Lösung ?
2. Wenn ja: findet Iteration die kleinste Lösung ??
3. Was, wenn  $\mathbb{D}$  nicht endlich ist ???

## Satz

## Knaster – Tarski

In einem vollständigen Verband  $\mathbb{D}$  hat jede monotone Funktion  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  einen kleinsten Fixpunkt  $d_0$ .

Sei  $P = \{d \in \mathbb{D} \mid f d \sqsubseteq d\}$  die Menge der Präfixpunkte.

Dann ist  $d_0 = \bigsqcap P$ .



*Bronisław Knaster (1893-1980), topology*

## Satz

## Knaster – Tarski

In einem vollständigen Verband  $\mathbb{D}$  hat jede monotone Funktion  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  einen kleinsten Fixpunkt  $d_0$ .

Sei  $P = \{d \in \mathbb{D} \mid f d \sqsubseteq d\}$  die Menge der Präfixpunkte.

Dann ist  $d_0 = \bigsqcap P$ .

## Beweis:

(1)  $d_0 \in P$ :

## Satz

## Knaster – Tarski

In einem vollständigen Verband  $\mathbb{D}$  hat jede monotone Funktion  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  einen kleinsten Fixpunkt  $d_0$ .

Sei  $P = \{d \in \mathbb{D} \mid f d \sqsubseteq d\}$  die Menge der Präfixpunkte.

Dann ist  $d_0 = \bigsqcap P$ .

## Beweis:

(1)  $d_0 \in P$ :

$$f d_0 \sqsubseteq f d \sqsubseteq d \quad \text{für alle } d \in P$$

$$\implies f d_0 \text{ ist untere Schranke von } P$$

$$\implies f d_0 \sqsubseteq d_0 \quad \text{weil } d_0 = \bigsqcap P$$

$$\implies d_0 \in P \quad \text{: -)}$$

$$(2) \quad f d_0 = d_0 :$$

(2)  $f d_0 = d_0 :$

$f d_0 \sqsubseteq d_0$  wegen (1)

$\implies f(f d_0) \sqsubseteq f d_0$  wegen Monotonie von  $f$

$\implies f d_0 \in P$

$\implies d_0 \sqsubseteq f d_0$  und die Behauptung folgt  $:-)$

(2)  $f d_0 = d_0$  :

$f d_0 \sqsubseteq d_0$  wegen (1)

$\implies f(f d_0) \sqsubseteq f d_0$  wegen Monotonie von  $f$

$\implies f d_0 \in P$

$\implies d_0 \sqsubseteq f d_0$  und die Behauptung folgt :-)

(3)  $d_0$  ist **kleinster** Fixpunkt:



(2)  $f d_0 = d_0$  :

$f d_0 \sqsubseteq d_0$  wegen (1)

$\implies f(f d_0) \sqsubseteq f d_0$  wegen Monotonie von  $f$

$\implies f d_0 \in P$

$\implies d_0 \sqsubseteq f d_0$  und die Behauptung folgt :-)

(3)  $d_0$  ist **kleinster** Fixpunkt:

$f d_1 = d_1 \sqsubseteq d_1$  weiterer Fixpunkt

$\implies d_1 \in P$

$\implies d_0 \sqsubseteq d_1$  :-))

## Bemerkung:

Der kleinste Fixpunkt  $d_0$  ist in  $P$  und untere Schranke :-)

$\implies d_0$  ist der kleinste Wert  $x$  mit  $x \sqsubseteq f x$

## Bemerkung:

Der kleinste Fixpunkt  $d_0$  ist in  $P$  und **untere Schranke**  $:-)$

$\implies d_0$  ist der kleinste Wert  $x$  mit  $x \sqsupseteq f x$

## Anwendung:

Sei  $x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (*)$

ein **Ungleichungssystem**, wobei alle  $f_i : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}$  monoton sind.

## Bemerkung:

Der kleinste Fixpunkt  $d_0$  ist in  $P$  und **untere Schranke**  $:-)$

$\implies d_0$  ist der kleinste Wert  $x$  mit  $x \sqsupseteq f x$

## Anwendung:

Sei  $x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (*)$

ein **Ungleichungssystem**, wobei alle  $f_i : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}$  monoton sind.

$\implies$  kleinste Lösung von  $(*) \equiv$  kleinster Fixpunkt von  $F \quad :-)$

Beispiel 1:  $\mathbb{D} = 2^U$ ,  $f x = x \cap a \cup b$

Beispiel 1:  $\mathbb{D} = 2^U$ ,  $f x = x \cap a \cup b$

$f$	$f^k \perp$	$f^k \top$
$0$	$\emptyset$	$\top$

Beispiel 1:  $\mathbb{D} = 2^U$ ,  $f x = x \cap a \cup b$

$f$	$f^k \perp$	$f^k \top$
0	$\emptyset$	$\top$
1	$b$	$a \cup b$

Beispiel 1:  $\mathbb{D} = 2^U$ ,  $f x = x \cap a \cup b$

$f$	$f^k \perp$	$f^k \top$
0	$\emptyset$	$\top$
1	$b$	$a \cup b$
2	$b$	$a \cup b$



Beispiel 1:  $\mathbb{D} = 2^U$ ,  $f x = x \cap a \cup b$

$f$	$f^k \perp$	$f^k \top$
0	$\emptyset$	$\top$
1	$b$	$a \cup b$
2	$b$	$a \cup b$

Beispiel 2:  $\mathbb{D} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Für die Funktion  $f x = x + 1$  ist:

$$f^i \perp = f^i 0 = i \quad \square \quad i + 1 = f^{i+1} \perp$$

Beispiel 1:  $\mathbb{D} = 2^U$ ,  $f x = x \cap a \cup b$

$f$	$f^k \perp$	$f^k \top$
0	$\emptyset$	$\top$
1	$b$	$a \cup b$
2	$b$	$a \cup b$

Beispiel 2:  $\mathbb{D} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Für die Funktion  $f x = x + 1$  ist:

$$f^i \perp = f^i 0 = i \quad \square \quad i + 1 = f^{i+1} \perp$$

$\implies$  Die **normale** Iteration erreicht nie einen Fixpunkt :-)

$\implies$  Man benötigt manchmal **transfinite Iteration** :-)

## Satz:

Sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  **monoton** und  $X \subseteq \mathbb{D}$  die **kleinste** Menge mit:

- (a)  $\perp \in X$ ;
- (b)  $f d \in X$  falls  $d \in X$ ;
- (c)  $\bigsqcup X_0 \in X$  für alle  $X_0 \subseteq X$ .

// diese Menge existiert offenbar :-)

## Satz:

Sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  **monoton** und  $X \subseteq \mathbb{D}$  die **kleinste** Menge mit:

- (a)  $\perp \in X$ ;
- (b)  $f d \in X$  falls  $d \in X$ ;
- (c)  $\sqcup X_0 \in X$  für alle  $X_0 \subseteq X$ .

// diese Menge existiert offenbar :-)

Dann ist  $d_0 = \sqcup X$  der kleinste Fixpunkt von  $f$ .

Beweis:

(1)  $f d_0 \sqsubseteq d_0$  d.h.  $d_0$  ist Präfixpunkt:

## Beweis:

(1)  $f d_0 \sqsubseteq d_0$  d.h.  $d_0$  ist **Präfixpunkt**:

$d_0 \in X$  wegen (c)

$\implies f d_0 \in X$  wegen (b)

$\implies f d_0 \sqsubseteq d_0$  :-)

## Beweis:

(1)  $f d_0 \sqsubseteq d_0$  d.h.  $d_0$  ist **Präfixpunkt**:

$d_0 \in X$  wegen (c)

$\implies f d_0 \in X$  wegen (b)

$\implies f d_0 \sqsubseteq d_0$  :-)

(2)  $d_0$  ist **kleinster** Präfixpunkt:

## Beweis:

(1)  $f d_0 \sqsubseteq d_0$  d.h.  $d_0$  ist **Präfixpunkt**:

$d_0 \in X$  wegen (c)

$\implies f d_0 \in X$  wegen (b)

$\implies f d_0 \sqsubseteq d_0$  :-)

(2)  $d_0$  ist **kleinster** Präfixpunkt:

Sei  $d_1$  weiterer Präfixpunkt, d.h.  $f d_1 \sqsubseteq d_1$ .

Dann erfüllt die Menge:  $X_1 = \{x \in \mathbb{D} \mid x \sqsubseteq d_1\}$

die Eigenschaften (a), (b) und (c) :-)



## Beweis:

(1)  $f d_0 \sqsubseteq d_0$  d.h.  $d_0$  ist **Präfixpunkt**:

$d_0 \in X$  wegen (c)

$\implies f d_0 \in X$  wegen (b)

$\implies f d_0 \sqsubseteq d_0$  :-)

(2)  $d_0$  ist **kleinster** Präfixpunkt:

Sei  $d_1$  weiterer Präfixpunkt, d.h.  $f d_1 \sqsubseteq d_1$ .

Dann erfüllt die Menge:  $X_1 = \{x \in \mathbb{D} \mid x \sqsubseteq d_1\}$

die Eigenschaften (a), (b) und (c) :-)

$\implies X \subseteq X_1$

$\implies d_1$  ist obere Schranke von  $X$

$\implies d_0 = \bigsqcup X \sqsubseteq d_1$  :-))

## Fazit:

Wir können Constraint-Systeme durch **Fixpunkt-Iteration** lösen,  
d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

## Fazit:

Wir können Constraint-Systeme durch **Fixpunkt-Iteration** lösen,  
d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

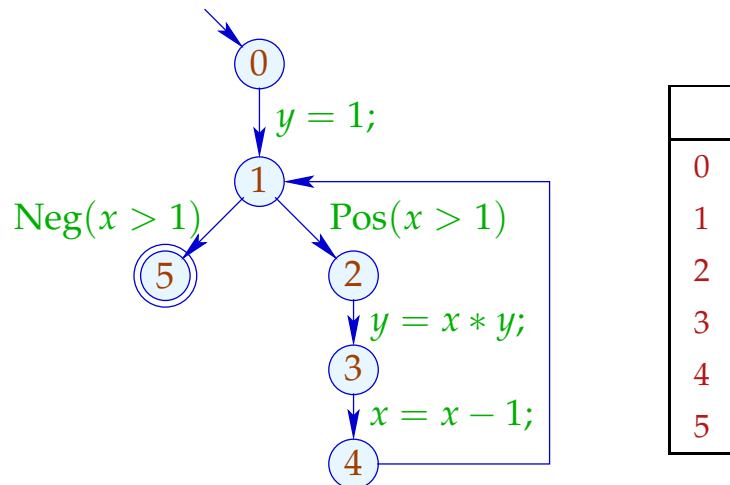
**Achtung:** Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich **ineffizient** :-)

## Fazit:

Wir können Constraint-Systeme durch **Fixpunkt-Iteration** lösen,  
d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

**Achtung:** Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich **ineffizient** :-)

## Beispiel:

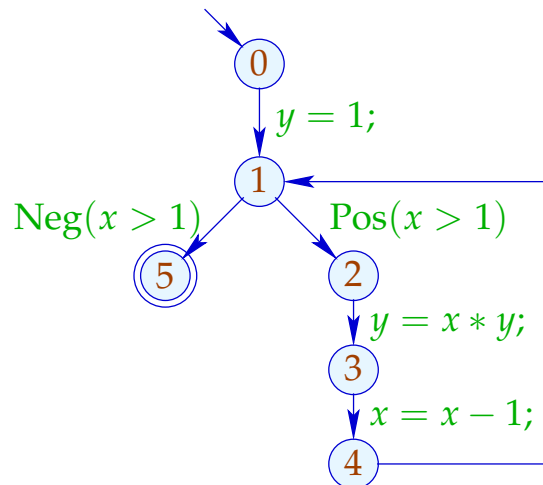


## Fazit:

Wir können Constraint-Systeme durch **Fixpunkt-Iteration** lösen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

**Achtung:** Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich **ineffizient** :-)

## Beispiel:



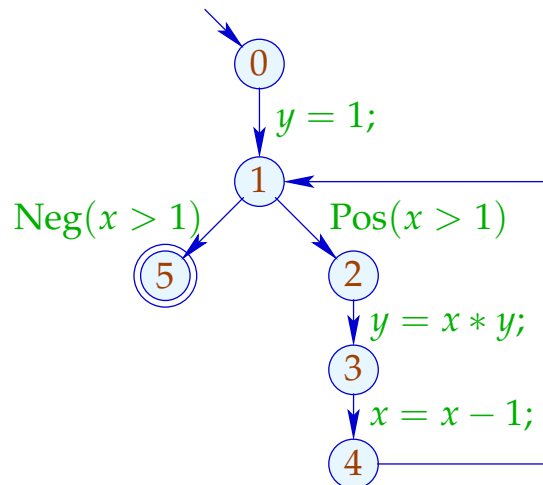
	1
0	$\emptyset$
1	$\{1, x > 1, x - 1\}$
2	<i>Expr</i>
3	$\{1, x > 1, x - 1\}$
4	$\{1\}$
5	<i>Expr</i>

## Fazit:

Wir können Constraint-Systeme durch **Fixpunkt-Iteration** lösen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

**Achtung:** Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich **ineffizient** :-)

## Beispiel:



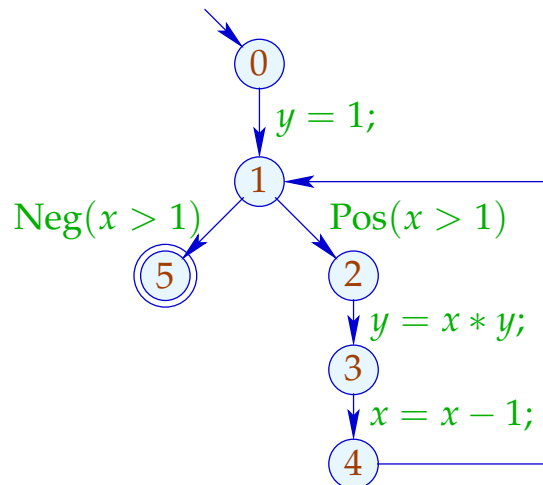
	1	2
0	$\emptyset$	$\emptyset$
1	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1\}$
2	<i>Expr</i>	$\{1, x > 1, x - 1\}$
3	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1, x > 1, x - 1\}$
4	$\{1\}$	$\{1\}$
5	<i>Expr</i>	$\{1, x > 1, x - 1\}$

## Fazit:

Wir können Constraint-Systeme durch **Fixpunkt-Iteration** lösen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

**Achtung:** Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich **ineffizient** :-)

## Beispiel:



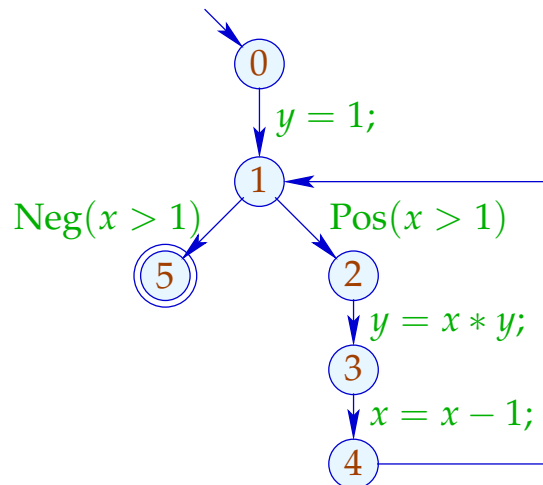
	1	2	3
0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
1	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
2	<i>Expr</i>	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1, x > 1\}$
3	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1, x > 1, x - 1\}$
4	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
5	<i>Expr</i>	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1, x > 1\}$

## Fazit:

Wir können Constraint-Systeme durch **Fixpunkt-Iteration** lösen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

**Achtung:** Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich **ineffizient** :-)

## Beispiel:



	1	2	3	4
0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
1	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
2	<i>Expr</i>	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1, x > 1\}$	$\{1, x > 1\}$
3	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1, x > 1\}$
4	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
5	<i>Expr</i>	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1, x > 1\}$	$\{1, x > 1\}$

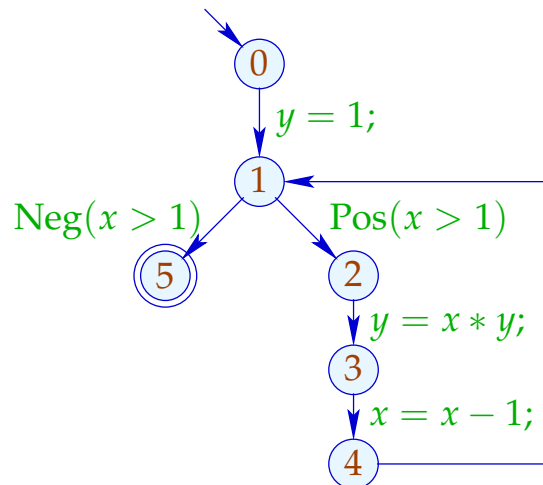


## Fazit:

Wir können Constraint-Systeme durch **Fixpunkt-Iteration** lösen,  
d.h. durch wiederholtes Einsetzen **:-)**

**Achtung:** Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich **ineffizient** **:-)**

## Beispiel:



	1	2	3	4	5
0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	
1	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	
2	<i>Expr</i>	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1, x > 1\}$	$\{1, x > 1\}$	
3	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1, x > 1\}$	dito
4	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	
5	<i>Expr</i>	$\{1, x > 1, x - 1\}$	$\{1, x > 1\}$	$\{1, x > 1\}$	

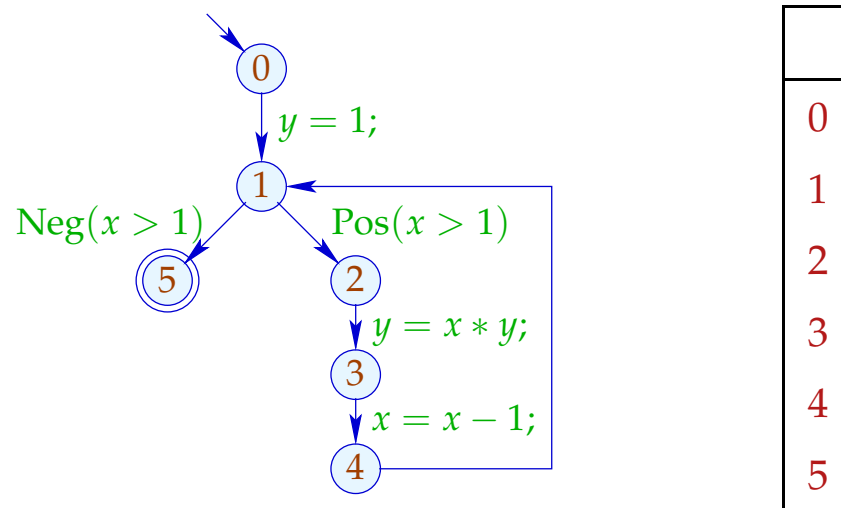
## Idee: Round Robin Iteration

Benutze bei der Iteration nicht die Werte der letzten Iteration, sondern die jeweils **aktuellen** :-)

## Idee: Round Robin Iteration

Benutze bei der Iteration nicht die Werte der letzten Iteration, sondern die jeweils **aktuellen** :-)

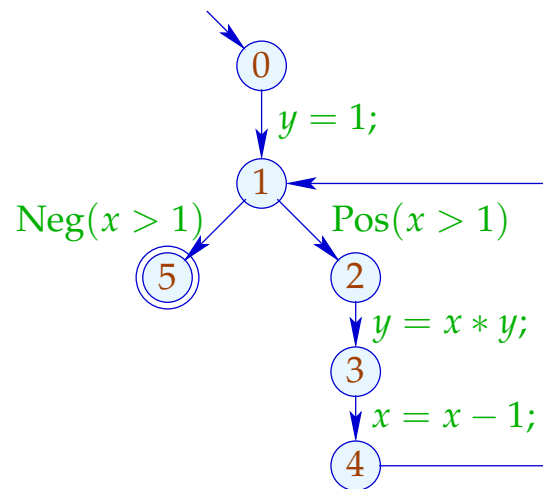
## Beispiel:



## Idee: Round Robin Iteration

Benutze bei der Iteration nicht die Werte der letzten Iteration, sondern die jeweils **aktuellen** :-)

## Beispiel:

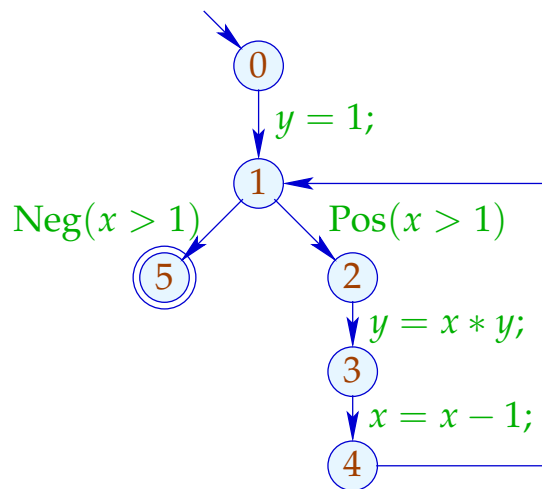


	1
0	$\emptyset$
1	{1}
2	{1, $x > 1$ }
3	{1, $x > 1$ }
4	{1}
5	{1, $x > 1$ }

## Idee: Round Robin Iteration

Benutze bei der Iteration nicht die Werte der letzten Iteration, sondern die jeweils **aktuellen** :-)

## Beispiel:



	1	2
0	$\emptyset$	
1	{1}	
2	{1, $x > 1$ }	
3	{1, $x > 1$ }	dito
4	{1}	
5	{1, $x > 1$ }	