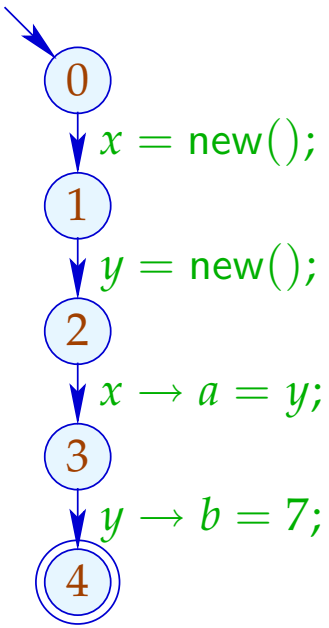
Alias-Analyse 2. Idee:

Berechne für jede Variable und jede Adresse einen Wert, der die Werte an sämtlichen Programmpunkten sicher approximiert!

... im einfachen Beispiel:



x	$\{(0,1)\}$
y	$\{(1,2)\}$
$(0,1).a$	$\{(1,2)\}$
$(0,1).b$	$\emptyset$

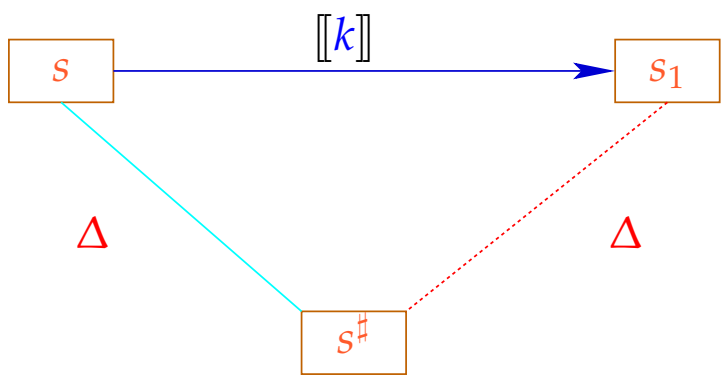
Jede Kante (u, lab, v) gibt Anlass zu Constraints:

lab	*Constraints*
$x = y;$	$\mathcal{P}[x] \supseteq \mathcal{P}[y]$
$x = \mathsf{new}();$	$\mathcal{P}[x] \supseteq \{(u, v)\}$
$x = R \to a;$	$\mathcal{P}[x] \supseteq \bigcup\{\mathcal{P}[f.a] \mid f \in \mathcal{P}[R]\}$
$R \to a = x;$	$\mathcal{P}[f.a] \supseteq (f \in \mathcal{P}[R])\,?\,\mathcal{P}[x] : \emptyset$
	für alle $f \in Addr^\sharp$

Andere Kanten haben keinen Effekt :-)

Diskussion:

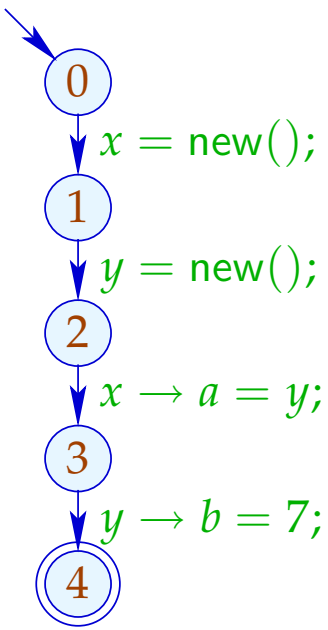
- Das resultierende Constraint-System ist $\mathcal{O}(k \cdot n)$ bei k abstrakten Adressen und n Kanten :-(
- Die Anzahl eventuell notwendiger Iterationen ist $\mathcal{O}(k)$ ...
- Die berechnete Information ist möglicherweise immer noch zu präzise !!?
- Zur Korrektheit einer Lösung $s^\sharp \in States^\sharp$ des Constraint-Systems zeigt man:



Alias-Analyse 3. Idee:

Berechne eine Äquivalenzrelation $\equiv$ auf Variablen x und Selektoren $y \to a$ mit $s_1 \equiv s_2$ falls an irgendeinem u s_1, s_2 die gleiche Adresse enthalten ...

... im einfachen Beispiel:



$$\equiv \; = \; \{\{x\}, \{y, x \to a\}, \{x \to b\}, \{y \to b\}\}$$

Diskussion:

- → Wir berechnen eine Information für das ganze Programm.
- → Die Berechnung dieser Information verwaltet Partitionen $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$:-)
- → Einzelne Mengen P_i identifizieren wir durch einen Repräsentanten $p_i \in P_i$.
- → Die Operationen auf einer Partition π sind:

$$
\begin{array}{lcll}
\mathsf{find}\,(\pi, p) & = & p_i & \text{falls } p \in P_i \\
 & // & \text{liefert den Repräsentanten} & \\
\mathsf{union}\,(\pi, p_{i_1}, p_{i_2}) & = & \{P_{i_1} \cup P_{i_2}\} \cup \{P_j \mid i_1 \neq j \neq i_2\} & \\
 & // & \text{vereinigt repräsentierte Klassen} &
\end{array}
$$

→ Sind $x_1, x_2 \in \mathit{Vars}$ äquivalent, müssen auch $x_i \to a$ und $x_i \to b$ äquivalent sein :-)

→ Ist $P_i \cap \mathit{Vars} \neq \emptyset$, soll auch $p_i \in \mathit{Vars}$ gelten. Dann können wir union rekursiv anwenden :

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{union}^*\,(\pi, q_1, q_2) & = & \mathsf{let}\;\; p_{i_1} \;=\; \mathsf{find}\,(\pi, q_1) \\
& & \qquad\; p_{i_2} \;=\; \mathsf{find}\,(\pi, q_2) \\
& & \mathsf{in}\;\; \mathsf{if}\; p_{i_1} == p_{i_2}\; \mathsf{then}\; \pi \\
& & \qquad \mathsf{else}\;\; \mathsf{let}\; \pi \;=\; \mathsf{union}\,(\pi, p_{i_1}, p_{i_2}) \\
& & \qquad\qquad \mathsf{in}\;\; \mathsf{if}\; p_{i_1}, p_{i_2} \in \mathit{Vars}\; \mathsf{then} \\
& & \qquad\qquad\qquad \mathsf{let}\; \pi = \mathsf{union}^*\,(\pi, p_{i_1} \to a, p_{i_2} \to a) \\
& & \qquad\qquad\qquad \mathsf{in}\; \mathsf{union}^*\,(\pi, p_{i_1} \to b, p_{i_2} \to b) \\
& & \qquad\qquad \mathsf{else}\; \pi
\end{array}
$$

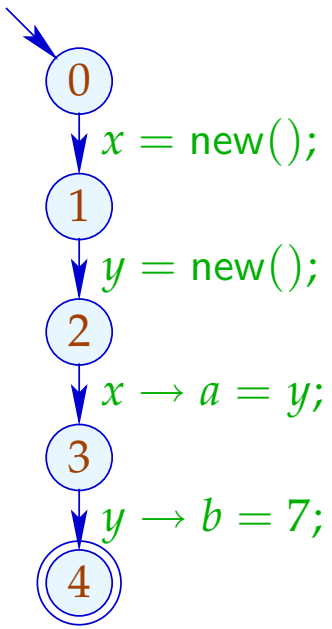
Die Analyse iteriert einmal über alle Kanten:

$$\pi = \{\{x\}, \{x \to a\}, \{x \to b\} \mid x \in \mathit{Vars}\};$$
$$\mathsf{forall}\, k = (_, \mathit{lab}, _)\, \mathsf{do} \quad \pi = [\![\mathit{lab}]\!]^\sharp\, \pi;$$

Dabei ist:

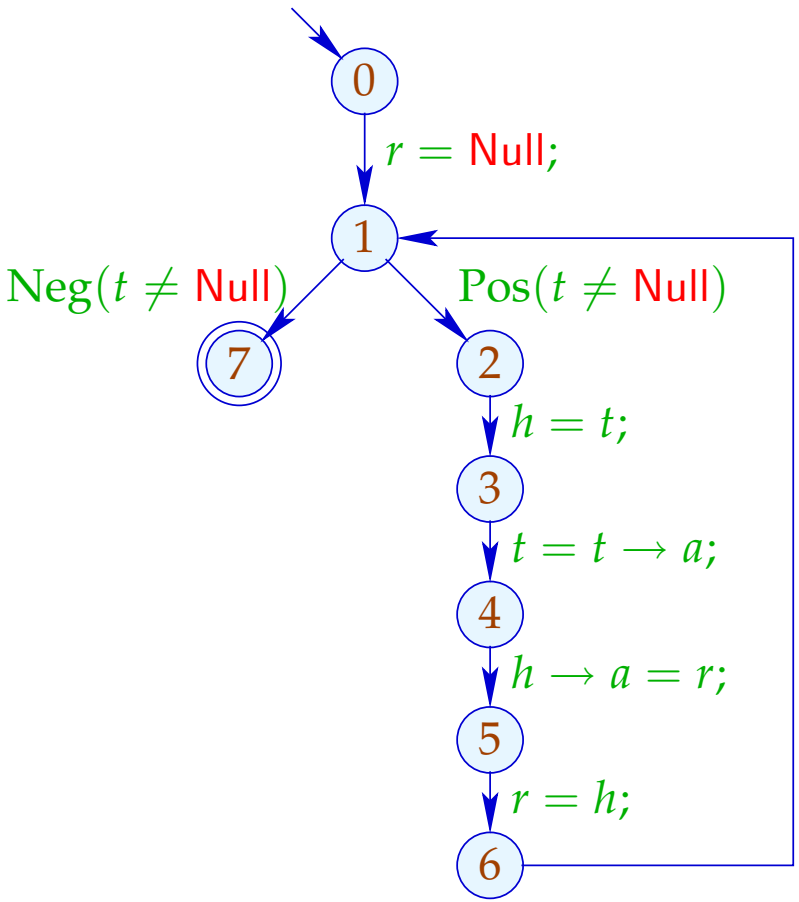
$$\begin{array}{lcll}
[\![x = y;]\!]^\sharp\, \pi & = & \mathsf{union}^*\,(\pi, x, y) & \\
[\![x = R \to a;]\!]^\sharp\, \pi & = & \mathsf{union}^*\,(\pi, x, R \to a) & \\
[\![R \to a = x;]\!]^\sharp\, \pi & = & \mathsf{union}^*\,(\pi, x, R \to a) & \\
[\![\mathit{lab}]\!]^\sharp\, \pi & = & \pi & \text{sonst}
\end{array}$$

... im einfachen Beispiel:



	$\{\{x\}, \{y\}, \{x \to a\}, \{y \to a\}, \ldots\}$
$(0,1)$	$\{\{x\}, \{y\}, \{x \to a\}, \{y \to a\}, \ldots\}$
$(1,2)$	$\{\{x\}, \{y\}, \{x \to a\}, \{y \to a\}, \ldots\}$
$(2,3)$	$\{\{x\}, \boxed{\{y, x \to a\}}, \{y \to a\}, \ldots\}$
$(3,4)$	$\{\{x\}, \{y, x \to a\}, \{y \to a\}, \ldots\}$

... im komplizierten Beispiel:



	$\{\{h\},\{r\},\{t\},\{h \to a\},\{t \to a\}\}$
$(2,3)$	$\{\{h,t\},\{r\},\{h \to a, t \to a\}\}$
$(3,4)$	$\{\{h,t,h \to a, t \to a\},\{r\}\}$
$(4,5)$	$\{\{h,t,r,h \to a, t \to a\}\}$
$(5,6)$	$\{\{h,t,r,h \to a, t \to a\}\}$

Achtung:

Um überhaupt etwas heraus zu kriegen, müssen wir annehmen, dass alle Variablen anfangs auf verschiedene Adressen zeigen.

Zur Komplexität:

Wir haben:

$\mathcal{O}(\#\,Kanten)$	Aufrufe von	union*
$\mathcal{O}(\#\,Kanten)$	Aufrufe von	find
$\mathcal{O}(\#\,Vars)$	Aufrufe von	union

$\Longrightarrow$ Wir benötigen effiziente Union-Find-Datenstruktur :-)

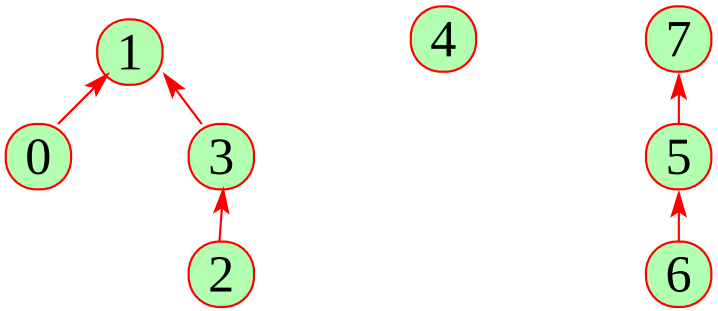
Idee:

Repräsentiere Partition von U als gerichteten Wald:

- Zu $u \in U$ verwalten wir einen Vater-Verweis $F[u]$.
- Elemente u mit $F[u] = u$ sind Wurzeln.

Einzelne Bäume sind Äquivalenzklassen.

Ihre Wurzeln sind die Repräsentanten ...

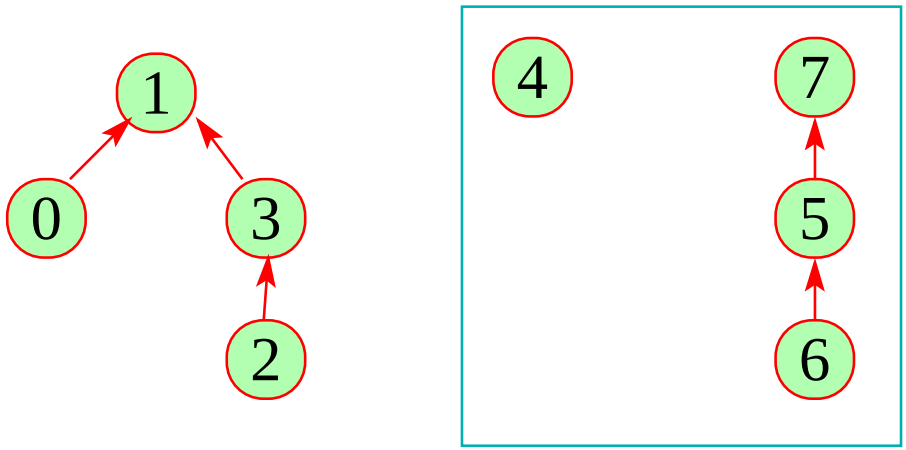


0	1	2	3	4	5	6	7

1	1	3	1	4	7	5	7

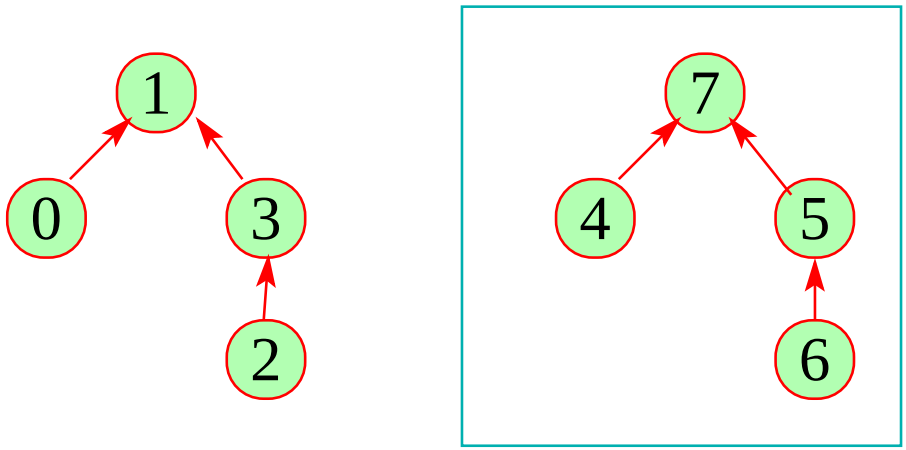
$\longrightarrow$ find (π, u) folgt den Vater-Verweisen :-)

$\longrightarrow$ union (π, u_1, u_2) hängt den Vater-Verweis eines u_i um ...



0	1	2	3	4	5	6	7

1	1	3	1	4	7	5	7



0	1	2	3	4	5	6	7

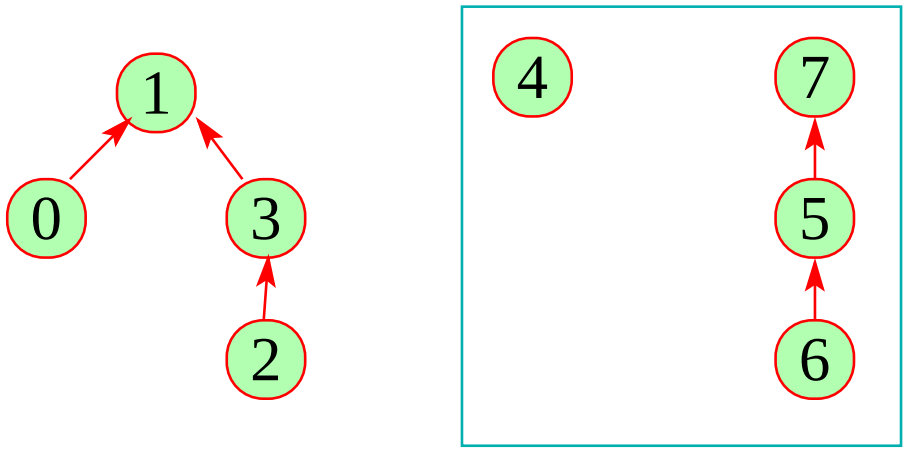
1	1	3	1	7	7	5	7

Die Kosten:

union	:	$\mathcal{O}(1)$	:-)
find	:	$\mathcal{O}(depth(\pi))$	:-(

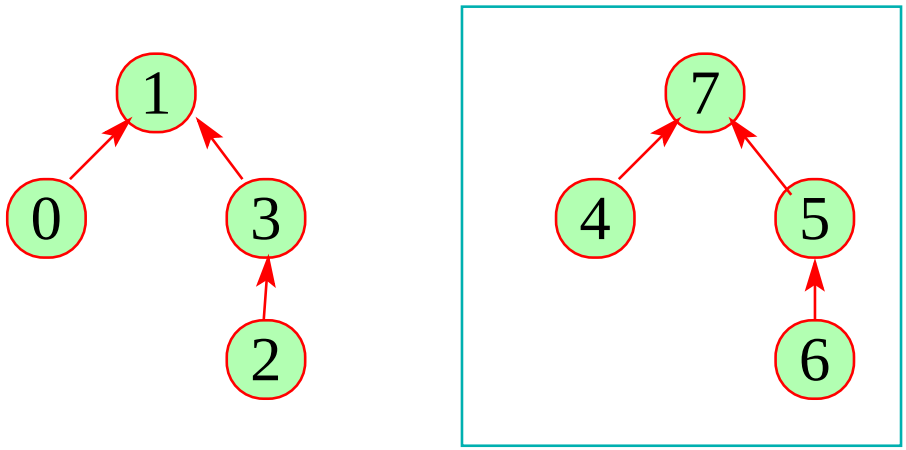
Strategie zur Vermeidung tiefer Bäume:

- Hänge den kleineren Baum unter den größeren !
- Benutze find , um Pfade zu komprimieren ...



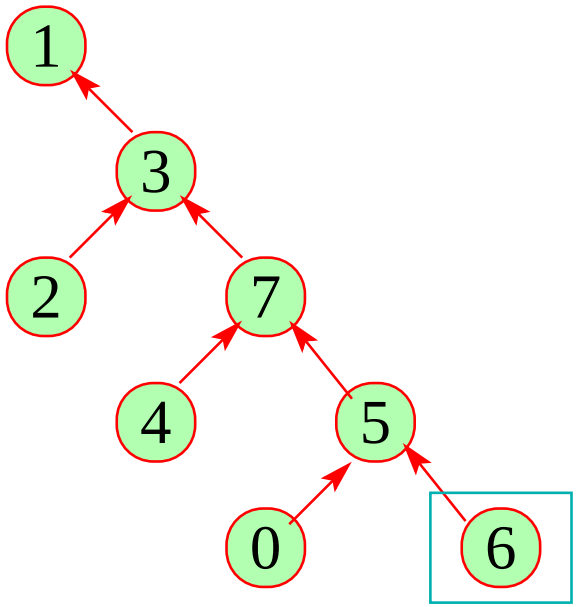
0	1	2	3	4	5	6	7

1	1	3	1	4	7	5	7

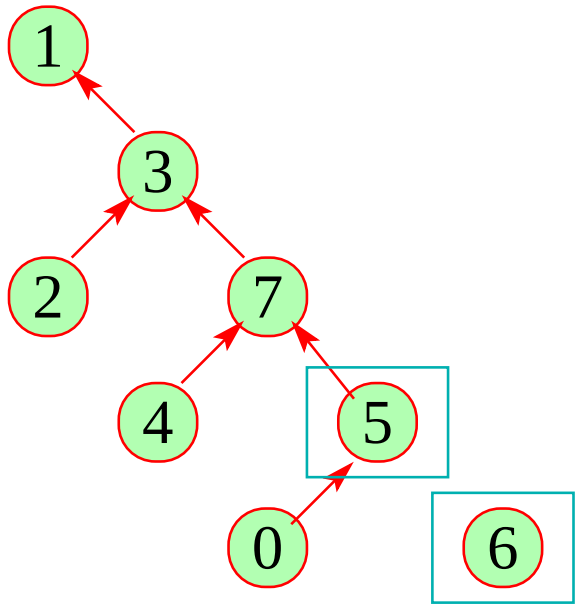


0	1	2	3	4	5	6	7

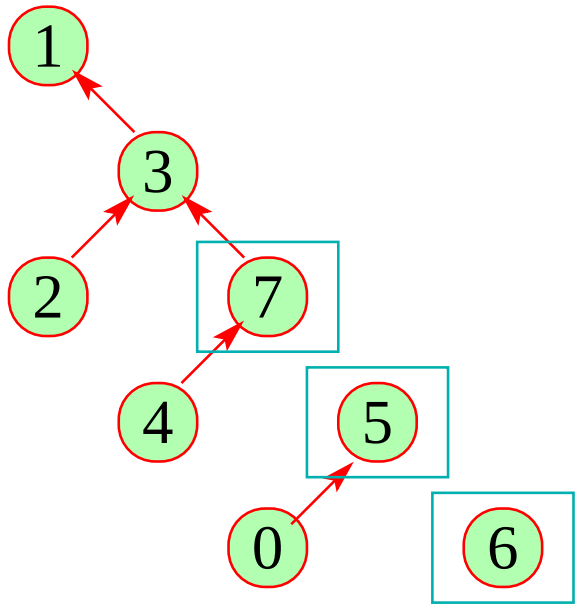
1	1	3	1	7	7	5	7



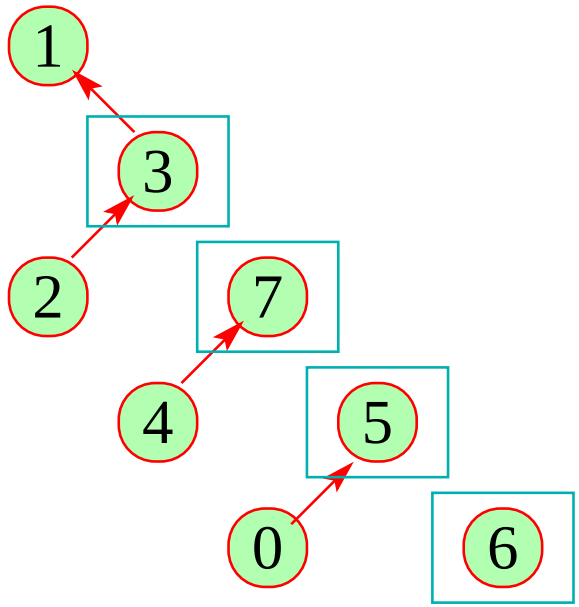
0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	3	1	7	7	5	3



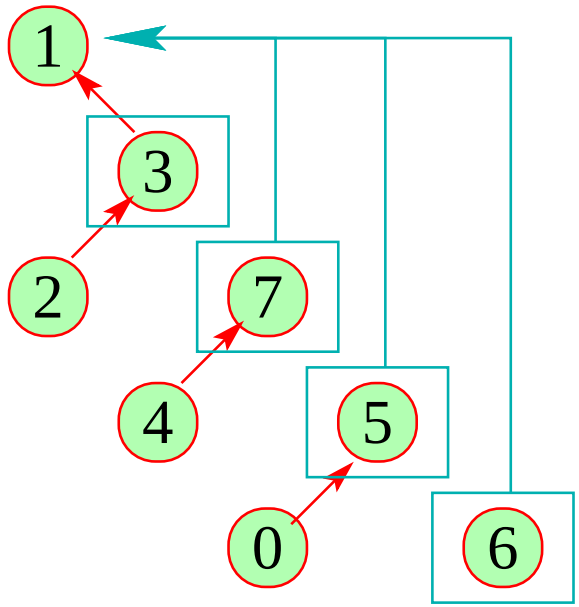
0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	3	1	7	7	5	3



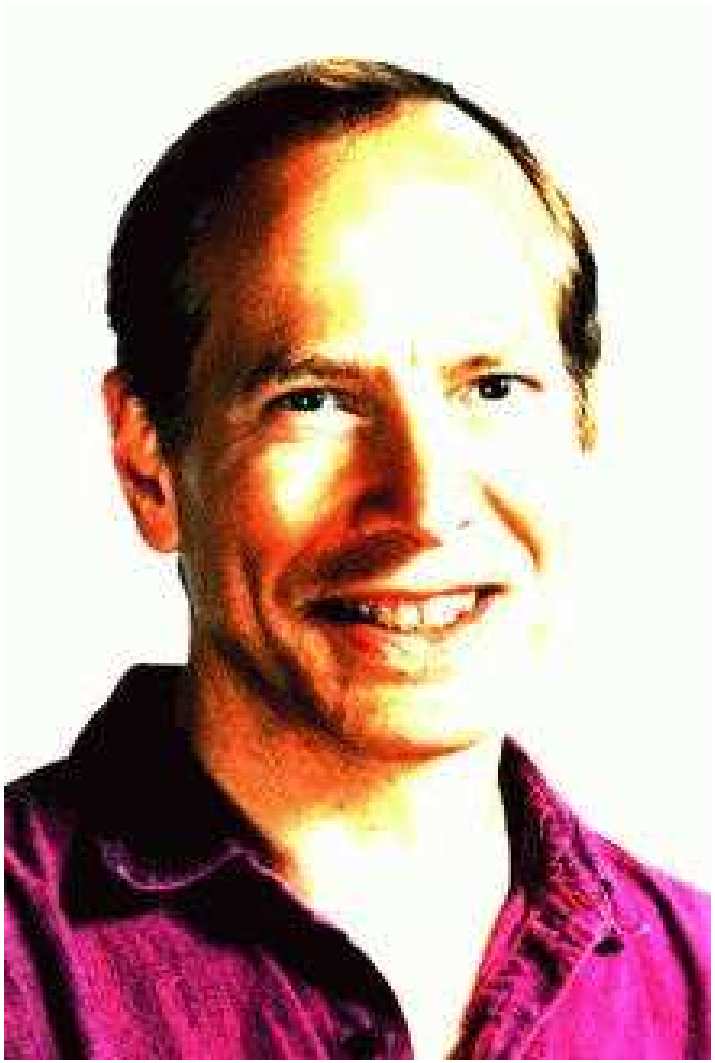
0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	3	1	7	7	5	3



0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	3	1	7	7	5	3



0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	3	1	1	7	1	1



Robert Endre Tarjan, Princeton

Beachte:

- Mit dieser Datenstruktur dauern n union- und m find-Operationen $\mathcal{O}(n + m \cdot \alpha(n, n))$

  // α die inverse Ackermann-Funktion :-)
- Für unsere Anwendung müssen wir union nur so modifizieren, dass an den Wurzeln nach Möglichkeit Elemente aus *Vars* stehen.
- Diese Modifikation vergrößert die asymptotische Laufzeit nicht :-)

Fazit:

Die Analyse ist blitzschnell — findet aber nicht sehr viel heraus.

Exkurs 3: Fixpunkt-Algorithmen

Betrachte: $x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n$

Beobachtung:

RR-Iteration ist ineffizient:

- $\rightarrow$ Wir benötigen eine ganze Runde, um Terminierung festzustellen :-(
- $\rightarrow$ Ändert sich in einer Runde der Wert nur einer Variable, berechnen wir trotzdem alle neu :-(
- $\rightarrow$ Die praktische Laufzeit hängt von der Reihenfolge der Variablen ab :-(

Idee: Workset-Iteration

Ändert eine Variable x_i ihren Wert, werten wir alle Variablen neu aus, die von x_i abhängen. Technisch benötigen wir:

$\rightarrow$ die Mengen $Dep\ f_i$ der Variablen, auf die die Auswertung von f_i zugreift. Daraus berechnen wir:

$$I[x_i] = \{x_j \mid x_i \in Dep\ f_j\}$$

d.h. die Menge der x_j, die von x_i abhängen.

$\rightarrow$ die Werte $D[x_i]$ der x_i, wobei anfangs $D[x_i] = \bot$;

$\rightarrow$ Eine Menge W der Variablen, deren Wert neu berechnet werden muss ...

Der Algorithmus:

$$
\begin{array}{l}
W = \{x_1, \ldots, x_n\}; \\
\textsf{while } (W \neq \emptyset) \ \{ \\
\qquad x_i \ = \ \textsf{extract } W; \\
\qquad t \ = \ f_i \, \textsf{eval}; \\
\qquad \textsf{if } (t \not\sqsubseteq D[x_i]) \ \{ \\
\qquad\qquad D[x_i] \ = \ D[x_i] \sqcup t; \\
\qquad\qquad W \ = \ W \cup I[x_i]; \\
\qquad \} \\
\}
\end{array}
$$

wobei :

$$
eval \ x_j \ = \ D[x_j]
$$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
x_1 &\supseteq \{a\} \cup x_3 \\
x_2 &\supseteq x_3 \cap \{a, b\} \\
x_3 &\supseteq x_1 \cup \{c\}
\end{aligned}
$$

	I
x_1	$\{x_3\}$
x_2	$\emptyset$
x_3	$\{x_1, x_2\}$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
x_1 &\supseteq \{a\} \cup x_3 \\
x_2 &\supseteq x_3 \cap \{a, b\} \\
x_3 &\supseteq x_1 \cup \{c\}
\end{aligned}
$$

	I
x_1	$\{x_3\}$
x_2	$\emptyset$
x_3	$\{x_1, x_2\}$

$D[x_1]$	$D[x_2]$	$D[x_3]$	W
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\boxed{x_1}, x_2, x_3$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\boxed{x_2}, x_3$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\boxed{x_3}$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a, c\}$	$\boxed{x_1}, x_2$
$\{a, c\}$	$\emptyset$	$\{a, c\}$	$\boxed{x_3}, x_2$
$\{a, c\}$	$\emptyset$	$\{a, c\}$	$\boxed{x_2}$
$\{a, c\}$	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\emptyset$

Theorem

Sei $x_i \sqsupseteq f_i\,(x_1, \ldots, x_n)\,, \quad i = 1, \ldots, n$ ein Constraint-System über dem vollständigen Verband $\mathbb{D}$ der Höhe $h > 0$.

(1) Der Algorithmus terminiert nach maximal $h \cdot N$ Auswertungen rechter Seiten, wobei

$$N = \sum_{i=1}^{n} (1 + \#\,(\mathit{Dep}\; f_i)) \qquad // \quad \text{Größe des Systems} \quad \text{:-)}$$

(2) Der Algorithmus liefert eine Lösung.
Sind alle f_i monoton, liefert er die kleinste.

Beweis:

Zu (1):

Jede Variable x_i kann nur h mal ihren Wert ändern :-)

Dann wird die Menge $I[x_i]$ zu W hinzu gefügt.

Damit ist die Anzahl an Auswertungen:

$$
\begin{aligned}
&\leq n + \sum_{i=1}^{n} (h \cdot \#(I[x_i])) \\
&= n + h \cdot \sum_{i=1}^{n} \#(I[x_i]) \\
&= n + h \cdot \sum_{i=1}^{n} \#(Dep\ f_i) \\
&\leq h \cdot \sum_{i=1}^{n} (1 + \#(Dep\ f_i)) \\
&= h \cdot N
\end{aligned}
$$

Zu (2):

wir betrachten nur die Aussage für monotone f_i .

Sei D_0 die kleinste Lösung. Man zeigt:

- $D_0[x_i] \sqsupseteq D[x_i]$ (zu jedem Zeitpunkt)
- $D[x_i] \not\sqsupseteq f_i\,\mathsf{eval} \Longrightarrow x_i \in W$ (am Ende des Rumpfs)
- Bei Terminierung liefert der Algo eine Lösung :-))

Diskussion:

- Im Beispiel werden tatsächlich weniger Auswertungen rechter Seiten benötigt als bei RR-Iteration :-)
- Der Algo funktioniert auch für nicht-monotone f_i :-)
- Für monotone f_i kann man den Algo vereinfachen:

$$\boxed{D[x_i] = D[x_i] \sqcup t;} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{D[x_i] = \qquad\qquad t;}$$

- Für Widening ersetzt man:

$$\boxed{D[x_i] = D[x_i] \sqcup t;} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{D[x_i] = D[x_i] \sqcup\!\!\!\!\sqcup t;}$$

- Für Narrowing ersetzt man:

$$\boxed{D[x_i] = D[x_i] \sqcup t;} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{D[x_i] = D[x_i] \sqcap t;}$$

Achtung:

- Der Algorithmus benötigt die Variablen-Abhängigkeiten *Dep* f_i .

  In unseren bisherigen Anwendungen waren die offensichtlich. Das muss nicht immer so sein :-(

- Wir benötigen eine Strategie für extract , die festlegt, welche Variable als nächstes auszuwerten ist.

- Am besten wäre es, wenn wir erst auswerten, dann auf das Ergebnis zugreifen ... :-)

  $\Longrightarrow$ rekursive Auswertung ...