Die erste Schleife darf in Iteration x auf keine Daten zugreifen, die die zweite Schleife in Iterationen $< x$ modifiziert.

Die zweite Schleife darf in Iteration x auf keine Daten zugreifen, die die erste Schleife in Iterationen $> x$ überschreibt.

I.a. muss man dazu die Indexausdrücke analysieren.

Sind diese linear, führt das auf Probleme des integer linear programming:

$$
\begin{array}{lll}
i & \geq & 0 \\
i & \leq & x-1 \\
x_{\mathsf{write}} & = & C+i \\
x_{\mathsf{read}} & = & C+x \\
x_{\mathsf{read}} & = & x_{\mathsf{write}}
\end{array}
$$

... hat offenbar keine Lösung :-)

Allgemeine Form:

$$\begin{array}{rcl} i & \geq & t_1 \\ t_2 & \geq & i \\ y_1 & = & s_1 \\ y_2 & = & s_2 \\ y_1 & = & y_2 \end{array}$$

für lineare Ausdrücke s, t_1, t_2, s_1, s_2 über i und den Iterations-Variablen.

Das lässt sich vereinfachen zu:

$$0 \;\leq\; s - t_1 \qquad\qquad 0 \;\leq\; t_2 - s \qquad\qquad 0 = s_1 - s_2$$

Was macht man damit ???

Einfacher Fall:

Die beiden Ungleichungen haben über $\mathbb{Q}$ eine leere Lösungsmenge.

Dann ist die Lösungsmenge auch über $\mathbb{Z}$ leer :-)

In unserem Beispiel:

$$\begin{array}{rcllcl} x & = & i & & & \\ 0 & \leq & i & & = & x \\ 0 & \leq & x - 1 - i & & = & -1 \end{array}$$

Die zweite Ungleichung hat überhaupt keine Lösung :-)

Gleiche Vorzeichen:

Kommt eine Variable x in allen Ungleichungen mit gleichem Vorzeichen vor, gibt es immer eine Lösung :-(

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} 0 & \leq & 13 + 7 \cdot x \\ 0 & \leq & -1 + 5 \cdot x \end{array}$$

Man muss x nur wählen als:

$$x \geq \mathsf{max}(-\frac{13}{7}, \frac{1}{5}) = \frac{1}{5}$$

Ungleiche Vorzeichen:

Eine Variable x kommt in einer Ungleichung negativ, in allen anderen höchstens positiv vor. Dann kann man ein Ungleichungssystem ohne x konstruieren ...

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & 13 - 7 \cdot x \\ 0 & \leq & -1 + 5 \cdot x \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x & \leq & \frac{13}{7} \\ 0 & \leq & -1 + 5 \cdot x \end{array}$$

Da $0 \leq -1 + 5 \cdot \frac{13}{7}$ hat das System eine rationale Lösung ...

Eine Variable:

Die Ungleichungen, in denen x positiv vorkommt, liefern untere Schranken.

Die Ungleichungen, in denen x negativ vorkommt, liefern obere Schranken.

Seien G, L die grösste untere bzw. kleinste obere Schranke. Dann liegen alle (ganzzahligen) Lösungen im Intervall $[G, L]$:-)

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & 13 - 7 \cdot x \\ 0 & \leq & -1 + 5 \cdot x \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x & \leq & \frac{13}{7} \\ x & \geq & \frac{1}{5} \end{array}$$

Die einzige ganzzahlige Lösung des Systems ist $x = 1$:-)

Diskussion:

- Lösungen sind natürlich immer nur innerhalb der Grenzen der Iterationsvariablen interessant.
- Jede ganzzahlige Lösung dort liefert einen Konflikt.
- Verschränkte Berechnung der Schleifen ist möglich, sofern es keinerlei Konflikte gibt :-)
- Die angegebenen Spezialfälle reichen, um den Fall von zwei Ungleichungen über $\mathbb{Q}$ bzw. einer Variable über $\mathbb{Z}$ zu behandeln.
- Die Anzahl der Variablen in den Ungleichungen entspricht der Anzahl der geschachtelten for-Schleifen $\Longrightarrow$ sie ist i.a. klein :-)

Diskussion:

- Integer Linear Programming (ILP) kann die Erfüllbarkeit herausfinden einer endlichen Menge von Gleichungen/Ungleichungen über $\mathbb{Z}$ der Form:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i = b \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i \geq b \ , \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

- Darüber hinaus kann eine (lineare) Zielfunktion optimiert werden :-)
- Achtung: Bereits das Entscheidungsproblem ist i.a. NP-schwierig !!!
- Trotzdem gibt es erstaunlich effiziente Implementierungen.
- Nicht nur Schleifen-Verschmelzung, auch andere Umstrukturierungen von Schleifen führen auf ILP-Probleme ...

Exkurs 5: Presburger Arithmetik

Viele Probleme der Informatik lassen sich ohne Multiplikation formulieren :-)

Wir betrachten hier erst einmal zwei einfache Spezialfälle ...

1. Lineare Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & & & = & 24 \\ x & - & y & + & 5z & = & 3 \end{array}$$

Fragen:

- Gibt es eine Lösung über $\mathbb{Q}$?
- Gibt es eine Lösung über $\mathbb{Z}$?
- Gibt es eine Lösung über $\mathbb{N}$?

Schauen wir uns dazu nochmal die Gleichungen an:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & & & = & 24 \\ x & - & y & + & 5z & = & 3 \end{array}$$

Antworten:

- Gibt es eine Lösung über $\mathbb{Q}$? Ja
- Gibt es eine Lösung über $\mathbb{Z}$? Nein
- Gibt es eine Lösung über $\mathbb{N}$? Nein

Komplexität:

- Gibt es eine Lösung über $\mathbb{Q}$? polynomiell
- Gibt es eine Lösung über $\mathbb{Z}$? polynomiell
- Gibt es eine Lösung über $\mathbb{N}$? NP-schwierig

Lösungsverfahren für Integers

Beobachtung 1:

$$a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k = b \qquad\qquad (\forall\, i: \; a_i \neq 0)$$

hat eine Lösung genau dann wenn

$$\text{ggT}\{a_1, \ldots, a_k\} \quad \mid \quad b$$

Beispiel:

$$5y - 10z = 18$$

hat keine Lösung über $\mathbb{Z}$:-)

Beispiel:

$$5y - 10z = 18$$

hat keine Lösung über $\mathbb{Z}$:-)

Beobachtung 2:

Eine Variable mit Koeffizient ± 1 kann beseitigt werden.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & & & = & 24 \\ x & - & y & + & 5z & = & 3 \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & & & = & 24 \\ x & - & y & + & 5z & = & 3 \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & & & = & 24 \\ x & - & y & + & 5z & = & 3 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \qquad x = 3 + y - 5z$$

Beispiel:

$$2x + 3y = 24$$

$$x = 3 + y - 5z$$

Beispiel:

$$2x + 3y = 24$$

$$x = 3 + y - 5z$$

$$\Longrightarrow$$

$$5y - 10z = 18$$

Beobachtung 3:

Jede (lösbare) Gleichung kann so massiert werden, dass sie eine Variable mit Koeffizient ± 1 besitzt :-)

Beobachtung 3:

Jede (lösbare) Gleichung kann so massiert werden, dass sie eine Variable mit Koeffizient ± 1 besitzt :-)

... mithilfe von uni-modularen Variablentransformationen :-))

Nehmen wir an, die Gleichung enthalte $a_1x_1 + a_2x_2$ mit

$$\text{ggT}\{a_1, a_2\} = p$$

Idee:

Ersetze x_1, x_2 durch zwei neue Variablen t_1, t_2 so dass zum Einen gilt:

$$\begin{array}{rcrcr} pt_1 & = & a_1x_1 & + & a_2x_2 \\ t_2 & = & b_1x_1 & + & b_2x_2 \end{array}$$

für geeignete b_1, b_2 ...

Nehmen wir an, die Gleichung enthalte $a_1 x_1 + a_2 x_2$ mit

$$\text{ggT}\{a_1, a_2\} = p$$

Idee:

Ersetze x_1, x_2 durch zwei neue Variablen t_1, t_2 so dass zum Einen gilt:

$$\begin{array}{rcccc} pt_1 & = & a_1 x_1 & + & a_2 x_2 \\ t_2 & = & b_1 x_2 & + & b_2 x_2 \end{array}$$

für geeignete b_1, b_2 ... und zum Anderen,

alle Lösungen für t_1, t_2 auch Lösungen für x_1, x_2 ergeben :-)

$\Longrightarrow$ Die inverse Matrix der Transformation:

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{p} & \frac{a_2}{p} \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

sollte ganzzahlige Koeffizienten haben.

$\Longrightarrow$ Die inverse Matrix der Transformation:

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{p} & \frac{a_2}{p} \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

sollte ganzzahlige Koeffizienten haben.

Dies ist der Fall, wenn

$$\frac{a_1}{p} b_2 - \frac{a_2}{p} b_1 \quad = \quad \pm 1$$

Da a_1, a_2 den ggT p haben,
findet Euclid's Algo λ_1, λ_2 mit:

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = p$$

Da a_1, a_2 den ggT p haben,
findet Euclid's Algo λ_1, λ_2 mit:

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 \quad = \quad p$$

$\Longrightarrow$

Wähle: $b_1 = -\lambda_2 \qquad b_2 = \lambda_1.$

Da a_1, a_2 den ggT p haben,
findet Euclid's Algo λ_1, λ_2 mit:

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = p$$

$\Longrightarrow$

Wähle: $b_1 = -\lambda_2 \qquad b_2 = \lambda_1.$

Dann:

$$\begin{array}{rcccc} x_1 & = & \lambda_1 t_1 & - & \frac{a_2}{p} t_2 \\ x_2 & = & \lambda_2 t_1 & + & \frac{a_1}{p} t_2 \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

Euclid: $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -1$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

Euclid: $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -1$

$\Longrightarrow$

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & = & -t_1 & - & 3t_2 \\ x_2 & = & -t_1 & - & 4t_2 \end{array}$$

Ersetzen vom x_1, x_2 mit t_1, t_2 liefert:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -7t_1 & - & 26t_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ t_1 & & & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

... und wir haben eine Variable beseitigt :-)

Lösen über $\mathbb{N}$

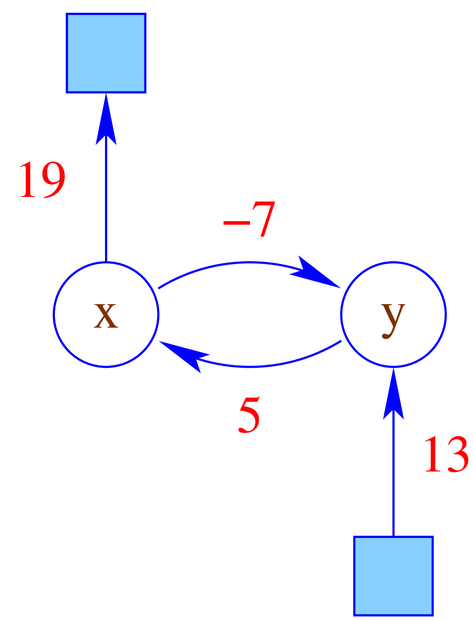
- ... ist von großer praktischer Bedeutung;
- ... hat zur Entwicklung vieler neuer Techniken geführt;
- ... erlaubt leicht die Kodierung NP-schwieriger Probleme;
- ... bleibt schwierig, sogar wenn nur drei Variablen pro Gleichung erlaubt sind.

2. Ein polynomieller Spezialfall:

$$\begin{array}{rcl} & x & \geq & y+5 \\ 19 & \geq & x & \\ & y & \geq & 13 \\ & y & \geq & x-7 \end{array}$$

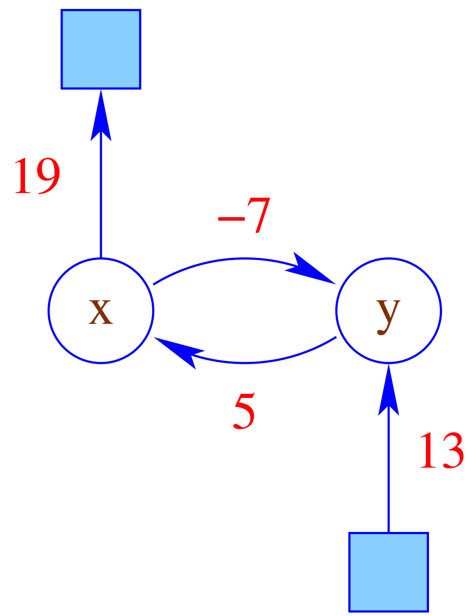
- Es gibt maximal zwei Variablen pro Un-Gleichung;
- keine Skalierungsfaktoren.

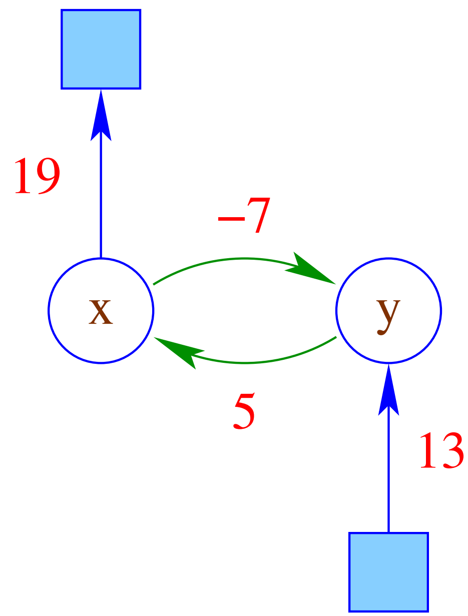
Idee: Representiere das System als Graph:

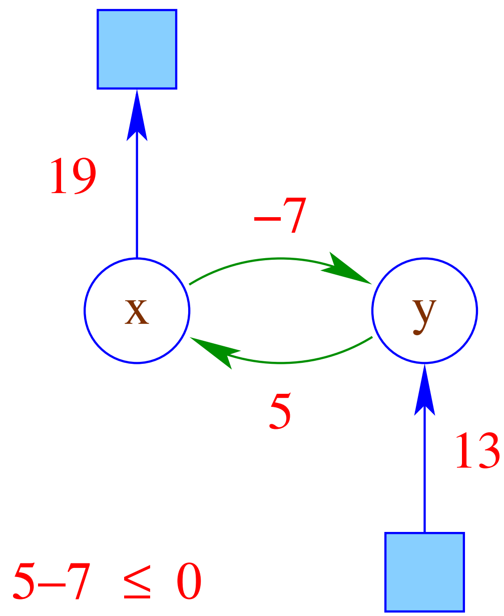


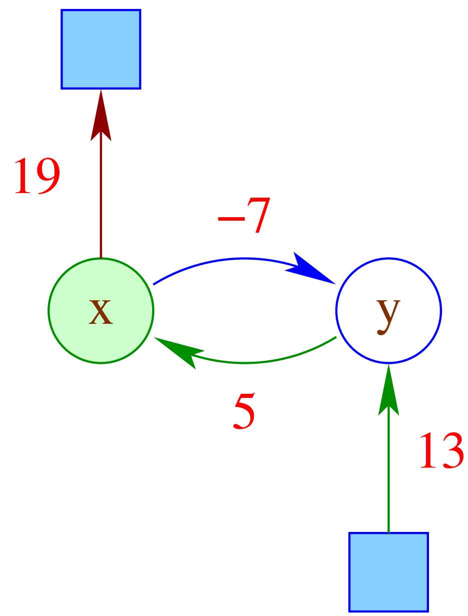
Die Ungleichungen sind erfüllbar genau dann wenn

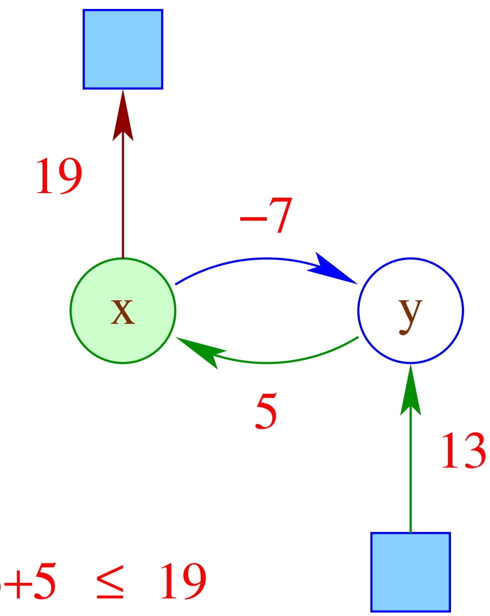
- die Gewichte jedes Kreises maximal ≤ 0 sind;
- die Gewichte, die x erreichen, maximal $\leq$ der Gewichte sind, die x verlassen.


19
−7
x
y
5
13


19
−7
x
y
5
13


19
−7
x
y
5
13
5−7 ≤ 0


19
−7
x
y
5
13



$13+5 \;\leq\; 19$

Die Ungleichungen sind erfüllbar genau dann wenn

- die Gewichte jedes Kreises maximal ≤ 0 sind;
- die Gewichte, die x erreichen, maximal $\leq$ der Gewichte sind, die x verlassen.

Berechne die reflexive und transitive Hülle der Kanten-Gewichte!

3. Ein allgemeines Lösungsverfahren:

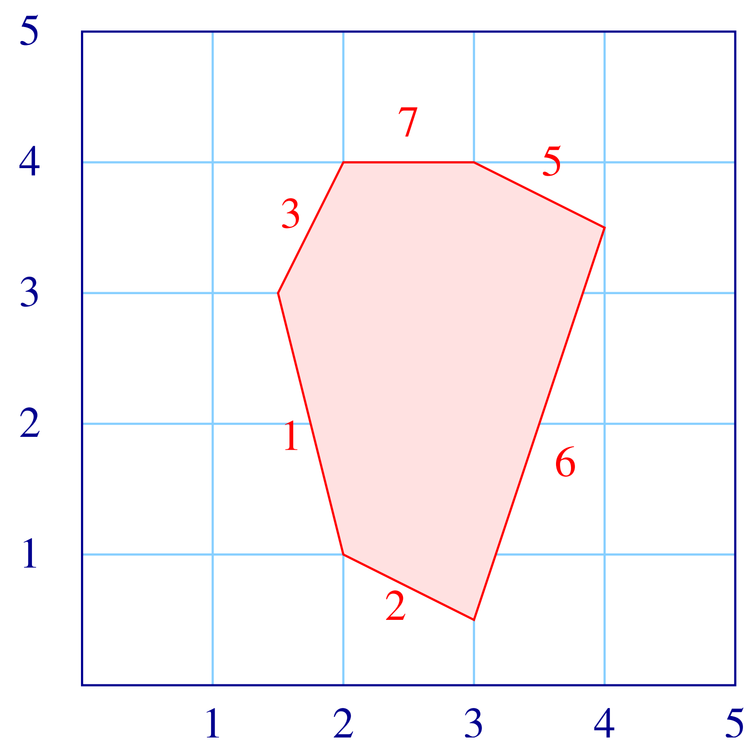
Idee: Fourier-Motzkin-Elimination

- Beseitige sukzessive einzelne Variablen x !
- Alle Ungleichungen mit positiven Vorkommen von x liefern untere Schranken.
- Alle Ungleichungen mit negativen Vorkommen von x liefern obere Schranken.
- Alle unteren Schranken müssen kleiner oder gleich allen oberen Schranken sein ;-))

Jean Baptiste Joseph Fourier,   1768–1830

Beispiel:

$$\begin{array}{lcll}
9 & \leq & 4x_1 + x_2 & (1) \\
4 & \leq & x_1 + 2x_2 & (2) \\
0 & \leq & 2x_1 - x_2 & (3) \\
6 & \leq & x_1 + 6x_2 & (4) \\
-11 & \leq & -x_1 - 2x_2 & (5) \\
-17 & \leq & -6x_1 + 2x_2 & (6) \\
-4 & \leq & -x_2 & (7)
\end{array}$$



Für x_1 finden wir:

$$\begin{array}{lllr} 9 & \leq & 4x_1 + x_2 & (1) \\ 4 & \leq & x_1 + 2x_2 & (2) \\ 0 & \leq & 2x_1 - x_2 & (3) \\ 6 & \leq & x_1 + 6x_2 & (4) \\ -11 & \leq & -x_1 - 2x_2 & (5) \\ -17 & \leq & -6x_1 + 2x_2 & (6) \\ -4 & \leq & -x_2 & (7) \end{array}$$

$$\begin{array}{lllr} \frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_2 & \leq & x_1 & (1) \\ 4 - 2x_2 & \leq & x_1 & (2) \\ \frac{1}{2}x_2 & \leq & x_1 & (3) \\ 6 - 6x_2 & \leq & x_1 & (4) \\ x_1 & \leq & 11 - 2x_2 & (5) \\ x_1 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (6) \\ -4 & \leq & -x_2 & (7) \end{array}$$

Wenn es ein solches x_1 gibt, müssen alle unteren Schranken kleiner gleich allen oberen sein, d.h.:

$$\begin{array}{rcll}
\frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_2 & \leq & 11 - 2x_2 & (1,5) \\
\frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_2 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (1,6) \\
4 - 2x_2 & \leq & 11 - 2x_2 & (2,5) \\
4 - 2x_2 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (2,6) \\
\frac{1}{2}x_2 & \leq & 11 - 2x_2 & (3,5) \\
\frac{1}{2}x_2 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (3,6) \\
6 - 6x_2 & \leq & 11 - 2x_2 & (4,5) \\
6 - 6x_2 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (4,6) \\
-4 & \leq & -x_2 & (7)
\end{array}$$

oder:

$$\begin{array}{rcll}
-35 & \leq & -7x_2 & (1,5) \\
-\frac{7}{12} & \leq & \frac{7}{12}x_2 & (1,6) \\
-7 & \leq & 0 & (2,5) \\
\frac{7}{6} & \leq & \frac{7}{3}x_2 & (2,6) \\
-22 & \leq & -5x_2 & (3,5) \\
-\frac{17}{6} & \leq & -\frac{1}{6}x_2 & (3,6) \\
-5 & \leq & 4x_2 & (4,5) \\
\frac{19}{6} & \leq & \frac{19}{3}x_2 & (4,6) \\
-4 & \leq & -x_2 & (7)
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_2 & \leq & 11 - 2x_2 & (1,5) \\
\frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_2 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (1,6) \\
4 - 2x_2 & \leq & 11 - 2x_2 & (2,5) \\
4 - 2x_2 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (2,6) \\
\frac{1}{2}x_2 & \leq & 11 - 2x_2 & (3,5) \\
\frac{1}{2}x_2 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (3,6) \\
6 - 6x_2 & \leq & 11 - 2x_2 & (4,5) \\
6 - 6x_2 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (4,6) \\
-4 & \leq & -x_2 & (7)
\end{array}
\quad \text{oder:} \quad
\begin{array}{rcll}
-5 & \leq & -x_2 & (1,5) \\
-1 & \leq & x_2 & (1,6) \\
-7 & \leq & 0 & (2,5) \\
\frac{1}{2} & \leq & x_2 & (2,6) \\
-\frac{22}{5} & \leq & -x_2 & (3,5) \\
-17 & \leq & -x_2 & (3,6) \\
-\frac{5}{4} & \leq & x_2 & (4,5) \\
\frac{1}{2} & \leq & x_2 & (4,6) \\
-4 & \leq & -x_2 & (7)
\end{array}
$$

Das ist der Ein-Variablen-Fall, den wir exakt lösen können:

$$\max\{-1, \boxed{\tfrac{1}{2}}, -\tfrac{5}{4}, \tfrac{1}{2}\} \quad \leq \quad x_2 \quad \leq \quad \min\{5, \tfrac{22}{5}, 17, \boxed{4}\}$$

Daraus können wir folgern: $\qquad x_2 \in [\frac{1}{2}, 4] \qquad$:-)

Im Allgemeinen:

- Das ursprüngliche System hat eine Lösung in $\mathbb{Q}$, gdw. das System nach Eliminierung einer Variable eine Lösung in $\mathbb{Q}$ besitzt :-)
- In jedem Eliminierungsschritt kann sich die Anzahl der Ungleichungen quadrieren $\Longrightarrow$ exponentielle Laufzeit :-((
- Es lässt sich so modifizieren, dass es Erfüllbarkeit über $\mathbb{Z}$ entscheidet $\Longrightarrow$ Omega-Test

William Worthington Pugh, Jr.
University of Maryland, College Park

Idee:

- Wir beseitigen sukzessive die Variablen. Dabei müssen wir allerdings Divisionen vermeiden ...
- Hat x überall Koeffizienten ± 1, machen wir Fourier-Motzkin-Elimination :-)
- Andernfalls stellen wir x auf einer Seite mit positivem Koeffizienten frei ...

Betrachten wir etwa (1) und (6) :

$$
\begin{array}{rcl}
6 \cdot x_1 & \leq & 17 + 2x_2 \\
9 - x_2 & \leq & 4 \cdot x_1
\end{array}
$$

E.O. können wir echte Ungleichungen betrachten:

$$\begin{aligned} 6 \cdot x_1 &< 18 + 2x_2 \\ 8 - x_2 &< 4 \cdot x_1 \end{aligned}$$

... und jeweils durch den ggT teilen:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 &< 9 + x_2 \\ 8 - x_2 &< 4 \cdot x_1 \end{aligned}$$

Das impliziert:

$$3 \cdot (8 - x_2) < 4 \cdot (9 + x_2)$$

Offenbar gilt:

- Ist die abgeleitete Ungleichung unerfüllbar, dann das ganze System :-)
- Sind alle so abgeleiteten Ungleichungen erfüllbar, gibt es eine Lösung, die aber möglicherweise nicht ganzzahlig ist :-(
- Es gibt aber eine ganzzahlige Lösung, sofern zwischen unterer und oberer Schranke stets genug Platz ist, so dass ein Integer dazwischen passt.
- Sei $\alpha < a \cdot x \qquad b \cdot x < \beta$.

  Dann muss nicht nur gelten:

  $$b \cdot \alpha < a \cdot \beta$$

  sondern sogar

  $$\boxed{a \cdot b} < a \cdot \beta - b \cdot \alpha$$

... im Beispiel:

$$12 \quad < \quad 4 \cdot (9 + x_2) - 3 \cdot (8 - x_2)$$

oder:

$$12 \quad < \quad 12 + 7x_2$$

bzw:

$$0 \quad < \quad x_2$$

Im Beispiel lassen sich auch diese verschärften Ungleichungen erfüllen

$\Longrightarrow$ das System hat über $\mathbb{Z}$ eine Lösung :-)