1.2 Beseitigung überflüssiger Zuweisungen

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
1: &\quad x = y + 2;\\
2: &\quad y = 5;\\
3: &\quad x = y + 3;
\end{aligned}
$$

Der Wert von x an den Programmpunkten $1, 2$ wird überschrieben, bevor er benutzt werden kann.

Die Variable x nennen wir deshalb an diesen Programmpunkten tot :-)

Beachte:

→ Zuweisungen an tote Variablen können wir uns schenken ;-)

→ Solche Ineffizienzen können u.a. durch andere Transformationen hervorgerufen werden.

Formale Definition:

Die Variable x heißt lebendig an u entlang des Pfads π, falls sich π zerlegen lässt in $\pi = \pi_1\, \pi_2\, k\, \pi_3$ so dass gilt:

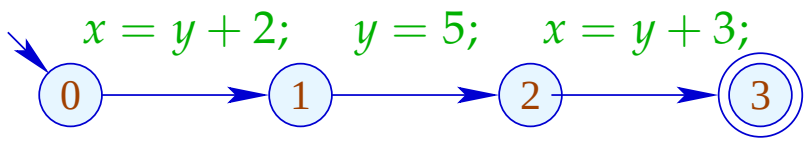
- π_1 erreicht u;
- k ist eine Benutzung von x;
- π_2 enthält keine Überschreibung von x.

Die Menge der an einer Kante $k = (\_, lab, \_)$ benutzten bzw. überschriebenen Variablen ist dabei gegeben durch:

lab	benutzt	überschrieben
$;$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\mathrm{Pos}\,(e)$	$Vars\,(e)$	$\emptyset$
$\mathrm{Neg}\,(e)$	$Vars\,(e)$	$\emptyset$
$R = e;$	$Vars\,(e)$	$\{R\}$
$R = M[e];$	$Vars\,(e)$	$\{R\}$
$M[e_1] = e_2;$	$Vars\,(e_1) \cup Vars\,(e_2)$	$\emptyset$

Eine Variable x, die nicht lebendig an u entlang π ist, heißt tot an u entlang π.

Beispiel:



Wir bemerken:

	lebendig	tot
0	$\{y\}$	$\{x\}$
1	$\emptyset$	$\{x, y\}$
2	$\{y\}$	$\{x\}$
3	$\emptyset$	$\{x, y\}$

Die Variable x ist lebendig an u falls x lebendig ist an u entlang irgend eines Pfads. Andernfalls ist x tot an u .

Die Variable x ist lebendig an u falls x lebendig ist an u entlang irgend eines Pfads. Andernfalls ist x tot an u.

Frage:

Wie berechnet man für jedes u die Menge der dort lebendigen/toten Variablen ???

Die Variable x ist lebendig an u falls x lebendig ist an u entlang irgend eines Pfads. Andernfalls ist x tot an u.

Frage:

Wie berechnet man für jedes u die Menge der dort lebendigen/toten Variablen ???

Idee:

Definiere für jede Kante $k = (u, \_, v)$ eine Funktion $[\![k]\!]^\sharp$, die die Menge der an v lebendigen Variablen in die Menge der an u lebendigen Variablen transformiert ...

Sei $\mathbb{L} = 2^{Vars}$.

Für $k = (\_, lab, \_)$ definieren wir $[\![k]\!]^\sharp = [\![lab]\!]^\sharp$ durch:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![;]\!]^\sharp\, L & = & L \\
[\![\mathrm{Pos}(e)]\!]^\sharp\, L & = & [\![\mathrm{Neg}(e)]\!]^\sharp\, L \;=\; L \cup Vars(e) \\
[\![x = e;]\!]^\sharp\, L & = & (L \backslash \{x\}) \cup Vars(e) \\
[\![R = M[e];]\!]^\sharp\, L & = & (L \backslash \{R\}) \cup Vars(e) \\
[\![M[e_1] = e_2;]\!]^\sharp\, L & = & L \cup Vars(e_1) \cup Vars(e_2)
\end{array}
$$

Sei $\mathbb{L} = 2^{Vars}$.

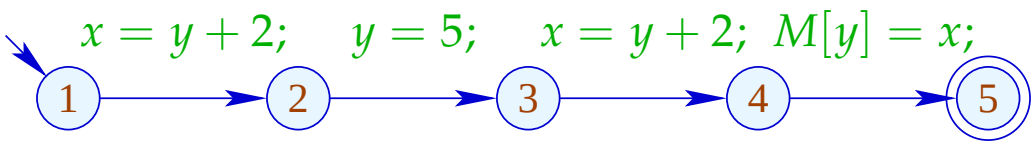
Für $k = (\_, lab, \_)$ definieren wir $[\![k]\!]^\sharp = [\![lab]\!]^\sharp$ durch:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![;]\!]^\sharp\, L & = & L \\
[\![\mathrm{Pos}(e)]\!]^\sharp\, L & = & [\![\mathrm{Neg}(e)]\!]^\sharp\, L \;=\; L \cup Vars(e) \\
[\![x = e;]\!]^\sharp\, L & = & (L \backslash \{x\}) \cup Vars(e) \\
[\![R = M[e];]\!]^\sharp\, L & = & (L \backslash \{R\}) \cup Vars(e) \\
[\![M[e_1] = e_2;]\!]^\sharp\, L & = & L \cup itVars(e_1) \cup Vars(e_2)
\end{array}
$$

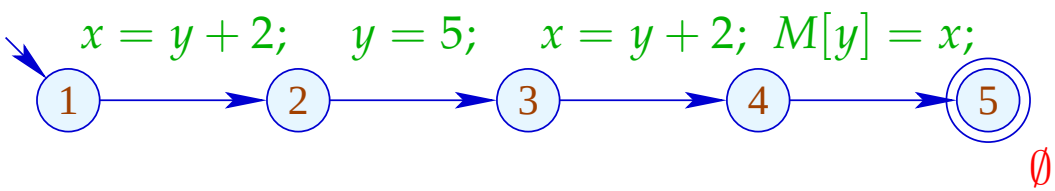
$[\![k]\!]^\sharp$ können wir wieder zu Effekten $[\![\pi]\!]^\sharp$ ganzer Pfade $\pi = k_1 \ldots k_r$ fortsetzen durch:

$$[\![\pi]\!]^\sharp = [\![k_1]\!]^\sharp \circ \ldots \circ [\![k_r]\!]^\sharp$$

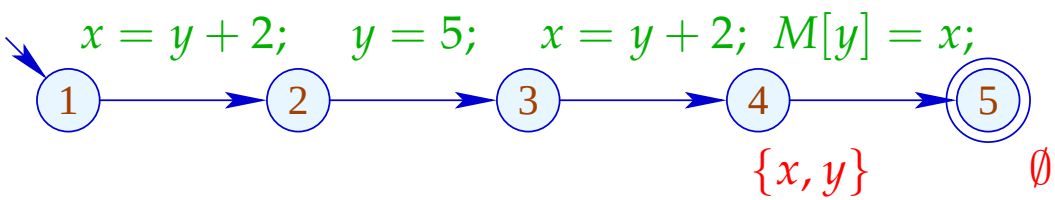
Wir vergewissern uns, dass diese Definitionen vernünftig sind :-)



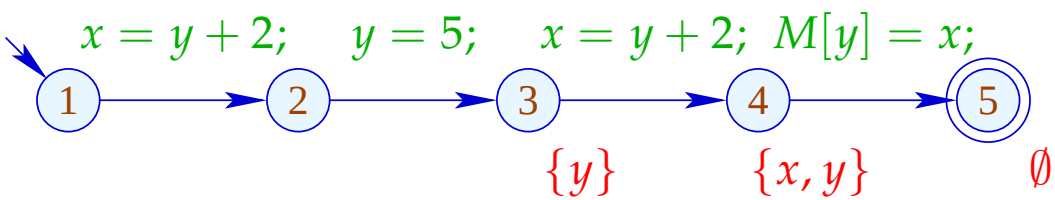
Wir vergewissern uns, dass diese Definitionen vernünftig sind :-)



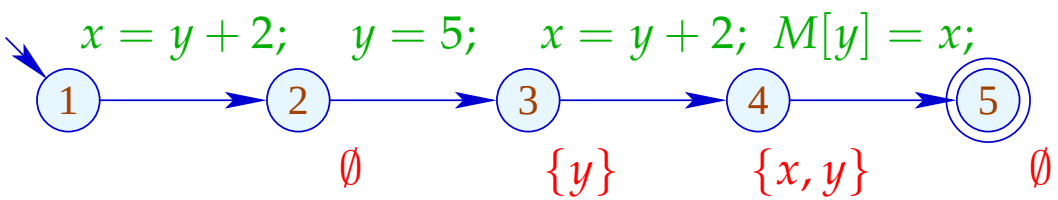
Wir vergewissern uns, dass diese Definitionen vernünftig sind :-)



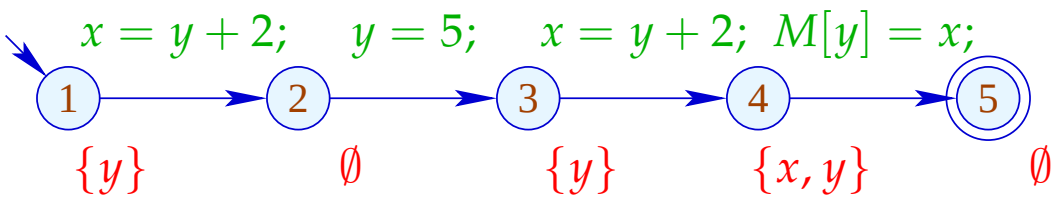
Wir vergewissern uns, dass diese Definitionen vernünftig sind :-)



Wir vergewissern uns, dass diese Definitionen vernünftig sind :-)



Wir vergewissern uns, dass diese Definitionen vernünftig sind :-)



Die Menge der an u lebendigen Variablen ist dann:

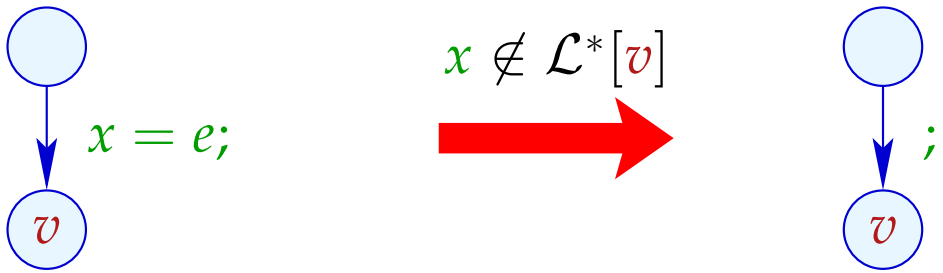
$$\mathcal{L}^*[u] \;=\; \bigcup\{[\![\pi]\!]^\sharp\,\emptyset \mid \pi : u \to^* \mathit{stop}\}$$

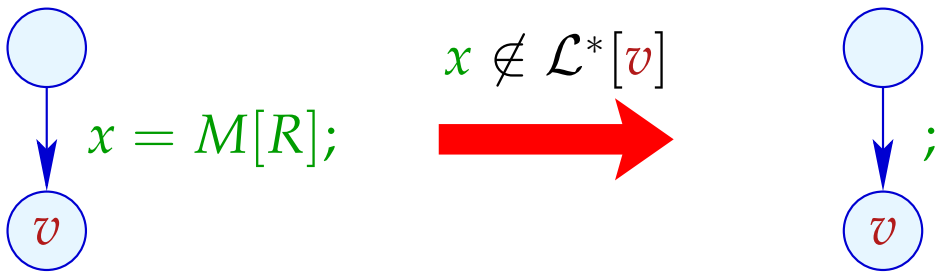
... in Worten:

- Die Pfade starten in u :-)
- x ist lebendig, wenn es nur entlang irgend eines Pfads lebendig ist :-)

  $\Longrightarrow$ Als Halbordnung für $\mathbb{L}$ benötigen wir $\sqsubseteq \;=\; \subseteq$.
- Am Programmende ist keine Variable mehr lebendig :-)

Transformation 2:





Zur Korrektheit zeigt man:

- → Korrektheit der Kanten-Effekte: Falls L die Menge der legendigen Variablen am Ende eines Pfads π sind, dann ist $[\![\pi]\!]^\sharp L$ die Menge der am Anfang lebendigen Variablen :-)
- → Korrektheit der Transformation auf einem Pfad: Wird auf den Wert einer Variable zugegriffen, ist diese stets lebendig. Der Wert toter Variablen ist darum egal :-)
- → Korrektheit der Transformation: Bei Ausführung des transformierten Programms haben bei jedem Besuch eines Programmpunkts die lebendigen Variablen den gleichen Wert :-))

Berechnung der Mengen $\mathcal{L}^*[u]$:

(1) Aufstellen des Ungleichungssystems:

$$\begin{array}{lcll} \mathcal{L}[stop] & \supseteq & \emptyset & \\ \mathcal{L}[u] & \supseteq & [\![k]\!]^\sharp(\mathcal{L}[v]) & k = (u, \_, v) \quad \text{Kante} \end{array}$$

(2) Lösen des Ungleichungssystems mittels RR-Iteration.

Da $\mathbb{L}$ endlich ist, terminiert die Iteration :-)

(3) Die kleinste Lösung $\mathcal{L}$ des Ungleichungssystems ist gleich $\mathcal{L}^*$ da alle $[\![k]\!]^\sharp$ distributiv sind :-))

Berechnung der Mengen $\mathcal{L}^*[u]$:

(1) Aufstellen des Ungleichungssystems:

$$\begin{array}{lcll} \mathcal{L}[stop] & \supseteq & \emptyset & \\ \mathcal{L}[u] & \supseteq & [\![k]\!]^\sharp(\mathcal{L}[v]) & k = (u, \_, v) \quad \text{Kante} \end{array}$$

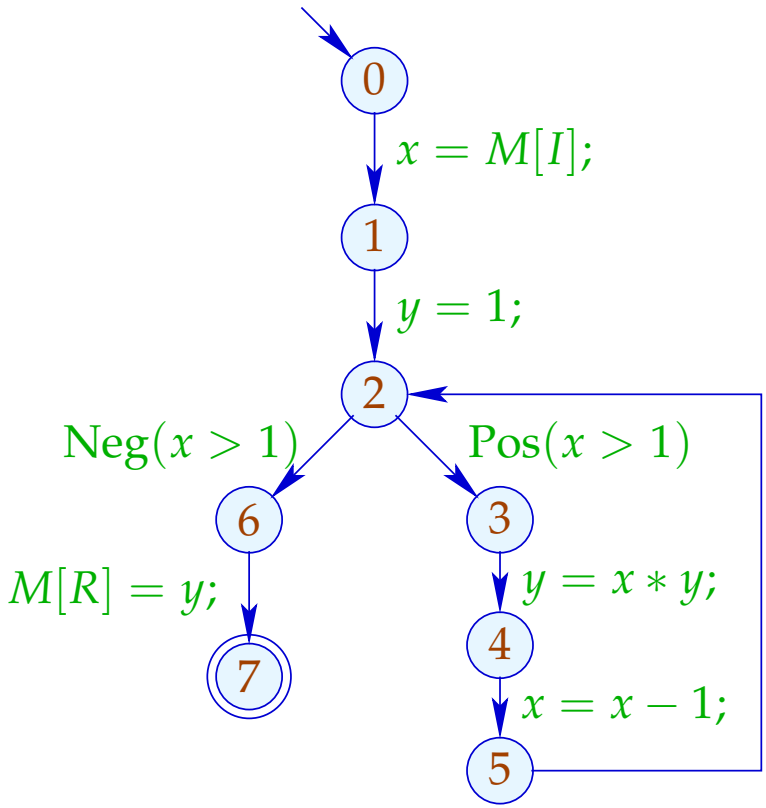
(2) Lösen des Ungleichungssystems mittels RR-Iteration.

Da $\mathbb{L}$ endlich ist, terminiert die Iteration :-)

(3) Die kleinste Lösung $\mathcal{L}$ des Ungleichungssystems ist gleich $\mathcal{L}^*$ da alle $[\![k]\!]^\sharp$ distributiv sind :-))

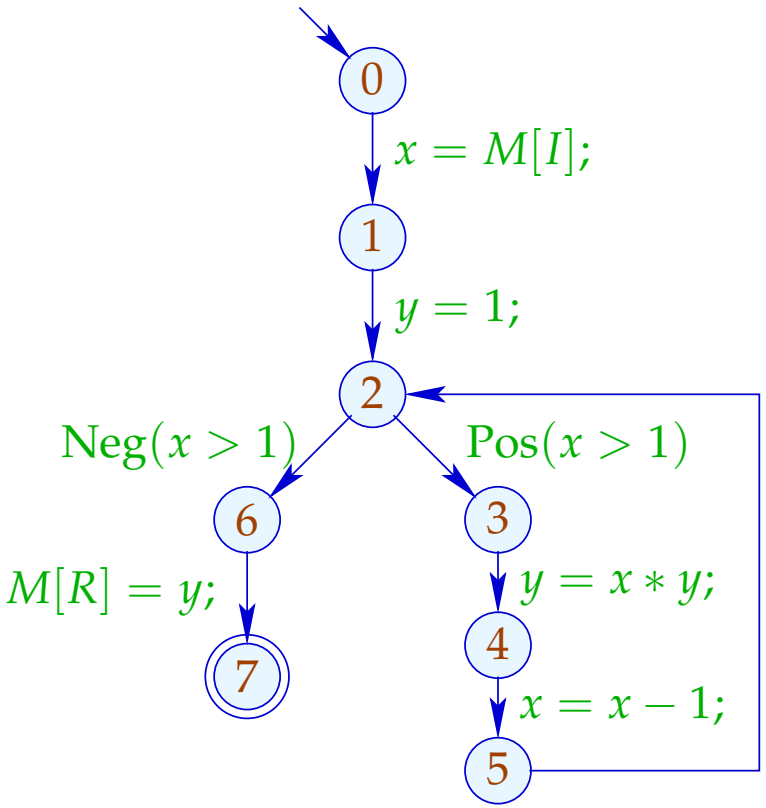
Achtung: Die Information wird rückwärts propagiert !!!

Beispiel:



$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{L}[0] & \supseteq & (\mathcal{L}[1] \backslash \{x\}) \cup \{I\} \\
\mathcal{L}[1] & \supseteq & \mathcal{L}[2] \backslash \{y\} \\
\mathcal{L}[2] & \supseteq & (\mathcal{L}[6] \cup \{x\}) \cup (\mathcal{L}[3] \cup \{x\}) \\
\mathcal{L}[3] & \supseteq & (\mathcal{L}[4] \backslash \{y\}) \cup \{x, y\} \\
\mathcal{L}[4] & \supseteq & (\mathcal{L}[5] \backslash \{x\}) \cup \{x\} \\
\mathcal{L}[5] & \supseteq & \mathcal{L}[2] \\
\mathcal{L}[6] & \supseteq & \mathcal{L}[7] \cup \{y, R\} \\
\mathcal{L}[7] & \supseteq & \emptyset
\end{array}
$$

Beispiel:

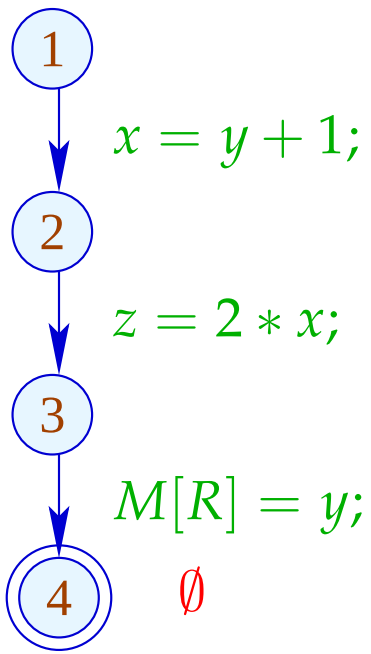


	1	2
7	$\emptyset$	
6	$\{y, R\}$	
2	$\{x, y, R\}$	dito
5	$\{x, y, R\}$	
4	$\{x, y, R\}$	
3	$\{x, y, R\}$	
1	$\{x, R\}$	
0	$\{I, R\}$	

Bei keiner Zuweisung ist die linke Variable tot :-)

Achtung:

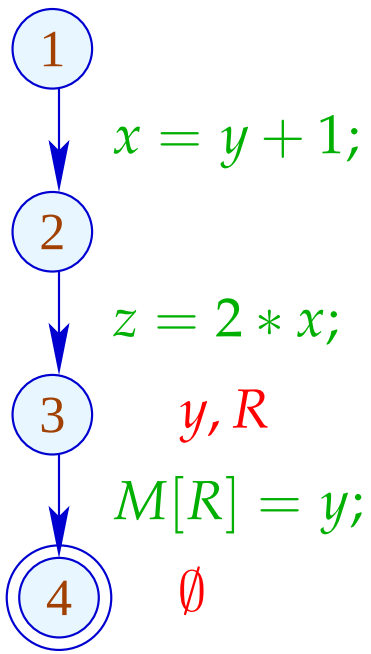
Beseitigung von Zuweisungen an tote Variablen kann weitere Variablen töten:



Bei keiner Zuweisung ist die linke Variable tot :-)

Achtung:

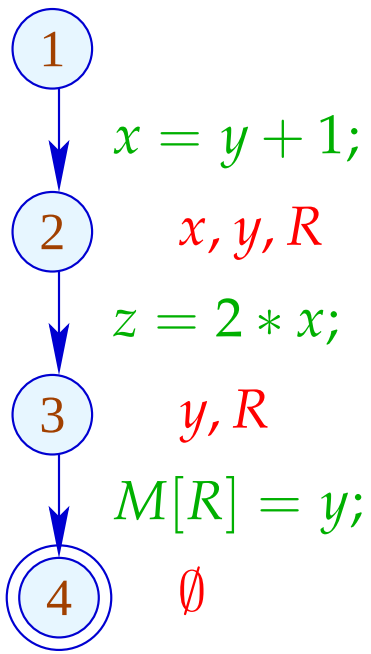
Beseitigung von Zuweisungen an tote Variablen kann weitere Variablen töten:



Bei keiner Zuweisung ist die linke Variable tot :-)

Achtung:

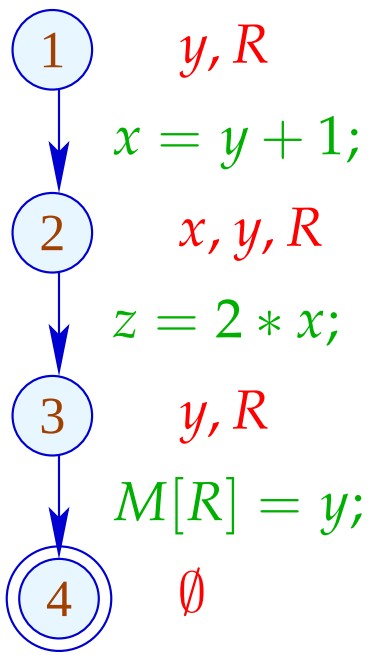
Beseitigung von Zuweisungen an tote Variablen kann weitere Variablen töten:



Bei keiner Zuweisung ist die linke Variable tot :-)

Achtung:

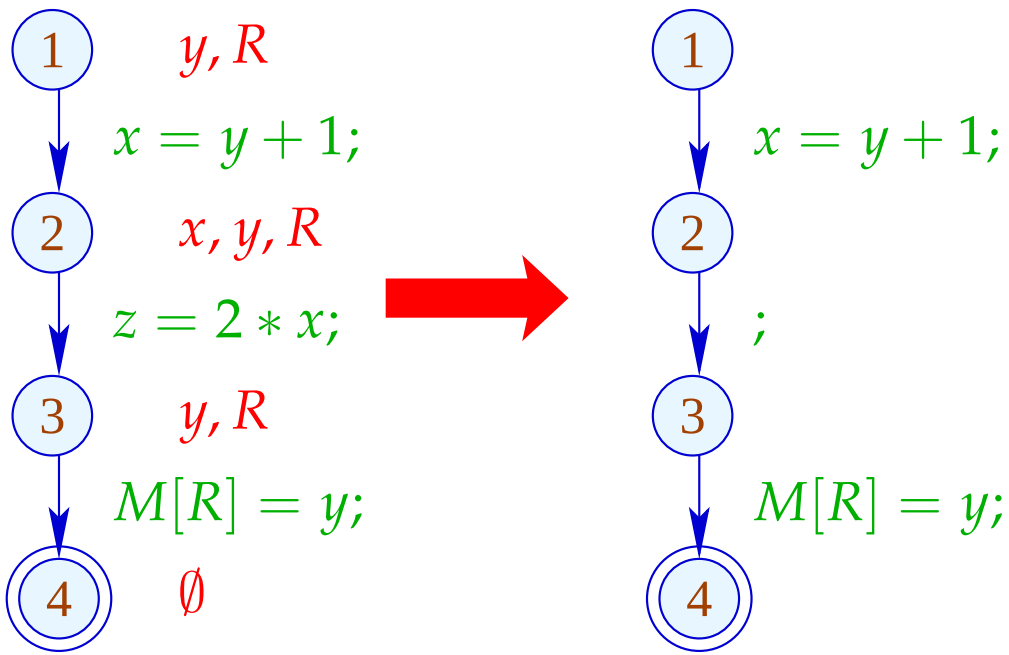
Beseitigung von Zuweisungen an tote Variablen kann weitere Variablen töten:



Bei keiner Zuweisung ist die linke Variable tot :-)

Achtung:

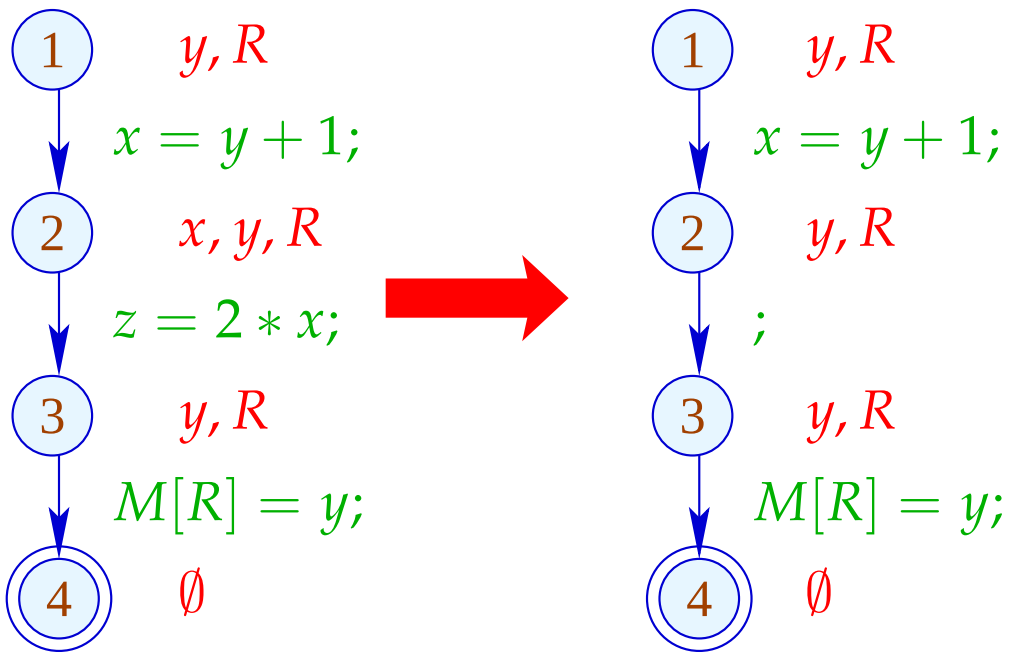
Beseitigung von Zuweisungen an tote Variablen kann weitere Variablen töten:



Bei keiner Zuweisung ist die linke Variable tot :-)

Achtung:

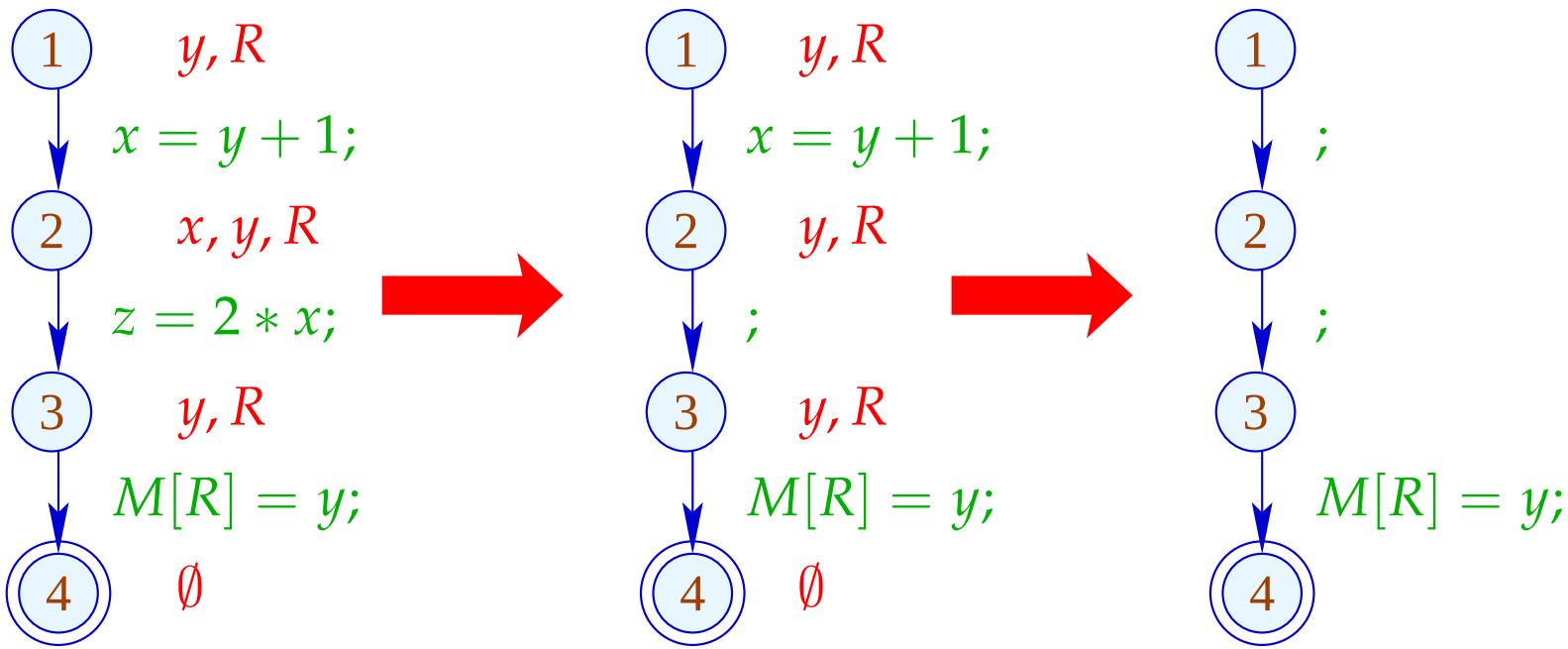
Beseitigung von Zuweisungen an tote Variablen kann weitere Variablen töten:



Bei keiner Zuweisung ist die linke Variable tot :-)

Achtung:

Beseitigung von Zuweisungen an tote Variablen kann weitere Variablen töten:



Das Programm mehrmals zu analysieren, ist hässlich :-(

Idee: Analysiere echte Lebendigkeit!

x heißt echt lebendig an u entlang eines Pfads π, falls sich π zerlegen lässt in $\pi = \pi_1\, \pi_2\, k\, \pi_3$ so dass gilt:

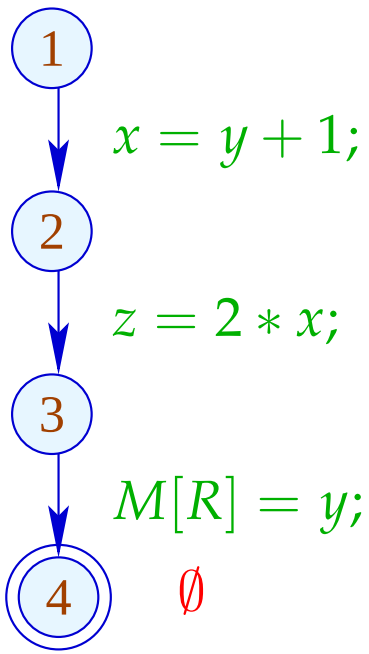
- π_1 erreicht u;
- k ist eine echte Benutzung von x;
- π_2 enthält keine Überschreibung von x.

Die Menge der an einer Kante $k = (\_, lab, v)$ echt benutzten Variablen ist gegeben durch:

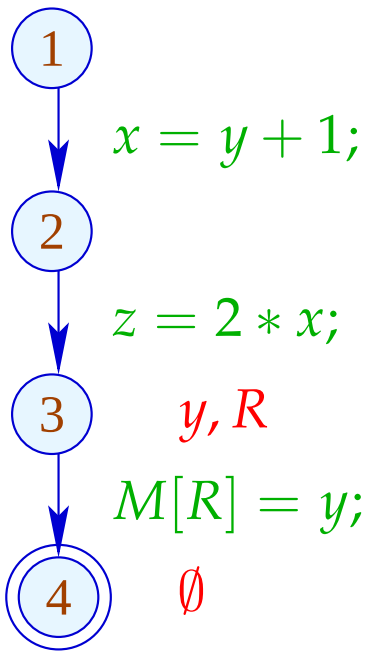
lab	echt benutzt
$;$	$\emptyset$
$\mathrm{Pos}\,(e)$	$Vars\,(e)$
$\mathrm{Neg}\,(e)$	$Vars\,(e)$
$x = e;$	$Vars\,(e)$ $(*)$
$x = M[e];$	$Vars\,(e)$ $(*)$
$M[e_1] = e_2;$	$Vars(e_1) \cup Vars(e_2)$

$(*)$ – sofern x an v echt lebendig ist :-)

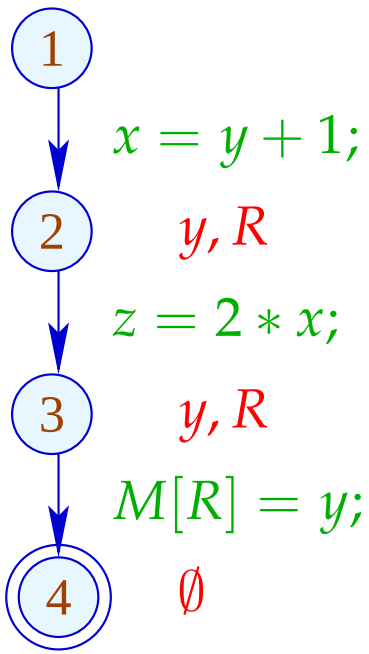
Beispiel:



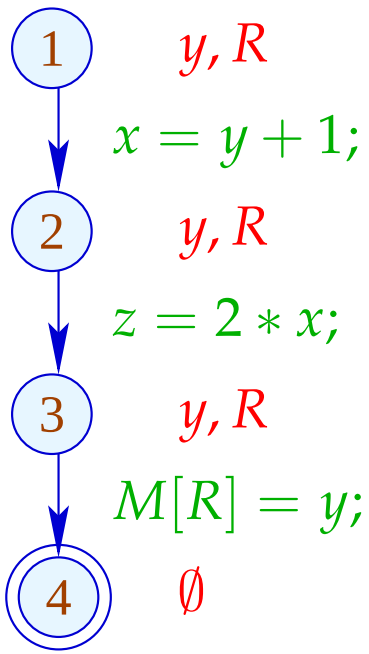
Beispiel:



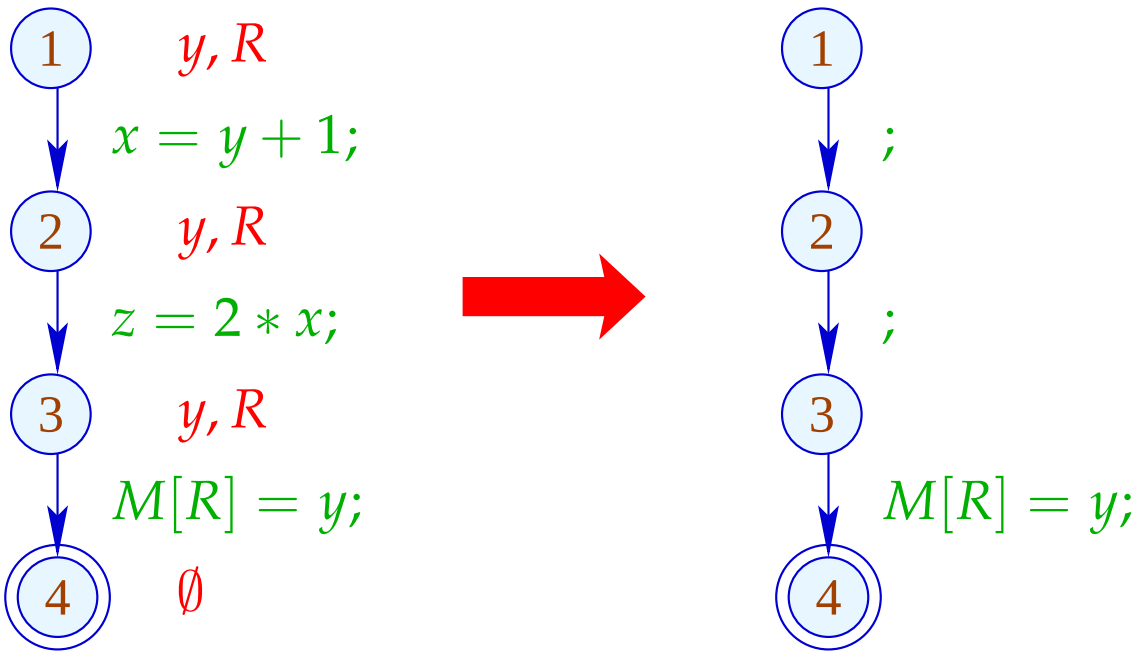
Beispiel:



Beispiel:



Beispiel:



Die Kanten-Effekte:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![;]\!]^\sharp\, L & = & L \\
[\![\mathrm{Pos}(e)]\!]^\sharp\, L & = & [\![\mathrm{Neg}(e)]\!]^\sharp\, L \;=\; L \cup \mathit{Vars}(e) \\
[\![x = e;]\!]^\sharp\, L & = & (L \backslash \{x\}) \cup \mathit{Vars}(e) \\
[\![R = M[e];]\!]^\sharp\, L & = & (L \backslash \{R\}) \cup \mathit{Vars}(e) \\
[\![M[e_1] = e_2;]\!]^\sharp\, L & = & L \cup \mathit{Vars}(e_1) \cup \mathit{Vars}(e_2)
\end{array}
$$

Die Kanten-Effekte:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![;]\!]^\sharp\, L & = & L \\
[\![\mathrm{Pos}(e)]\!]^\sharp\, L & = & [\![\mathrm{Neg}(e)]\!]^\sharp\, L \;=\; L \cup \mathit{Vars}(e) \\
[\![x = e;]\!]^\sharp\, L & = & (L \backslash \{x\}) \cup \; (x \in L)\,?\,\mathit{Vars}(e) : \emptyset \\
[\![R = M[e];]\!]^\sharp\, L & = & (L \backslash \{R\}) \cup \; (R \in L)\,?\,\mathit{Vars}(e) : \emptyset \\
[\![M[e_1] = e_2;]\!]^\sharp\, L & = & L \cup \mathit{Vars}(e_1) \cup \mathit{Vars}(e_2)
\end{array}
$$

Beachte:

- Die Kanten-Effekte für echt lebendige Variablen sind komplizierter als für lebendige Variablen :-)
- Sie sind aber immer noch distributiv !!

Beachte:

- Die Kanten-Effekte für echt lebendige Variablen sind komplizierter als für lebendige Variablen :-)
- Sie sind aber immer noch distributiv !!

  Dazu betrachten wir für $\mathbb{D} = 2^U$, $f\ y = (u \in y)\ ?\ b : \emptyset$
  Wir überprüfen:

$$\begin{aligned} f\ (y_1 \cup y_2) &= (u \in y_1 \cup y_2)\ ?\ b : \emptyset \\ &= (u \in y_1 \vee u \in y_2)\ ?\ b : \emptyset \\ &= (u \in y_1)\ ?\ b : \emptyset \cup (u \in y_2)\ ?\ b : \emptyset \\ &= f\ y_1 \cup f\ y_2 \end{aligned}$$

Beachte:

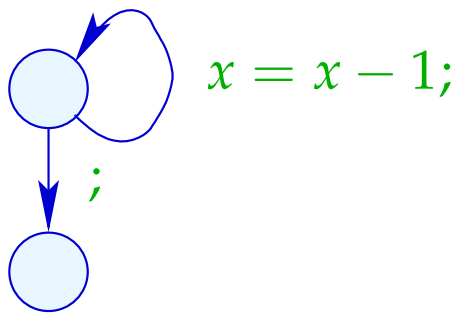
- Die Kanten-Effekte für echt lebendige Variablen sind komplizierter als für lebendige Variablen :-)
- Sie sind aber immer noch distributiv !!

  Dazu betrachten wir für $\mathbb{D} = 2^U$, $f\, y = (u \in y)\,?\,b : \emptyset$
  Wir überprüfen:

$$\begin{aligned} f\,(y_1 \cup y_2) &= (u \in y_1 \cup y_2)\,?\,b : \emptyset \\ &= (u \in y_1 \vee u \in y_2)\,?\,b : \emptyset \\ &= (u \in y_1)\,?\,b : \emptyset \cup (u \in y_2)\,?\,b : \emptyset \\ &= f\, y_1 \cup f\, y_2 \end{aligned}$$

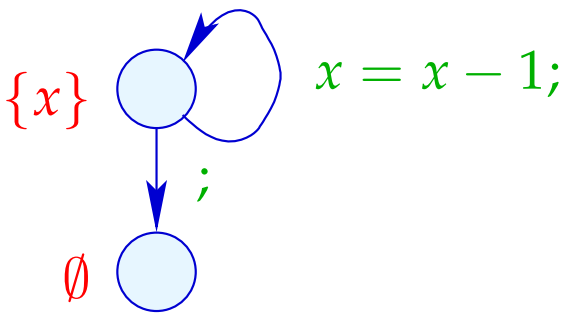
$\Longrightarrow$ Ungleichungssystem liefert MOP :-))

- Echte Lebendigkeit findet mehr überflüssige Zuweisungen als wiederholte Lebendigkeit !!!



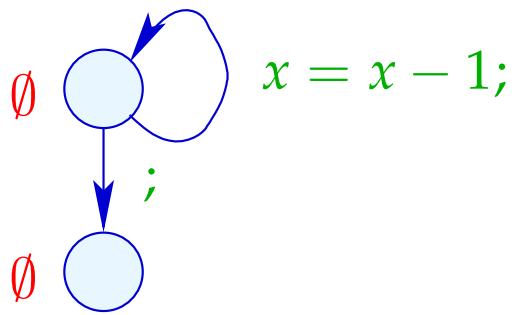
- Echte Lebendigkeit findet mehr überflüssige Zuweisungen als wiederholte Lebendigkeit !!!

Lebendigkeit:



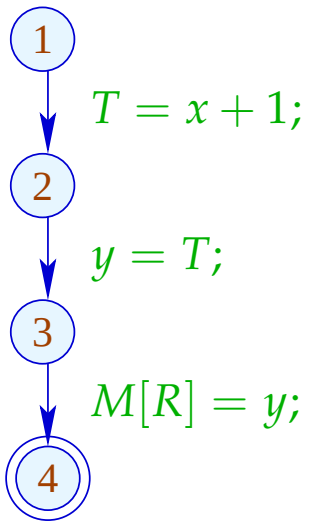
- Echte Lebendigkeit findet mehr überflüssige Zuweisungen als wiederholte Lebendigkeit !!!

Echte Lebendigkeit:



1.3 Beseitigung überflüssiger Umspeicherungen

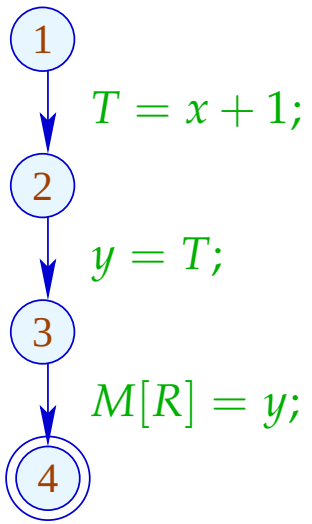
Beispiel:



Offenbar ist die Umspeicherung nutzlos :-(

1.3 Beseitigung überflüssiger Umspeicherungen

Beispiel:

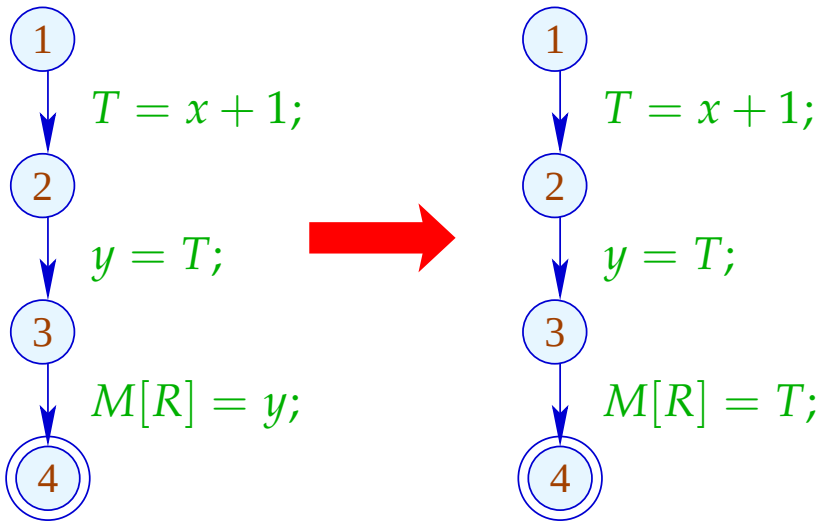


Offenbar ist die Umspeicherung nutzlos :-(

Statt y könnten wir auch T abspeichern :-)

1.3 Beseitigung überflüssiger Umspeicherungen

Beispiel:

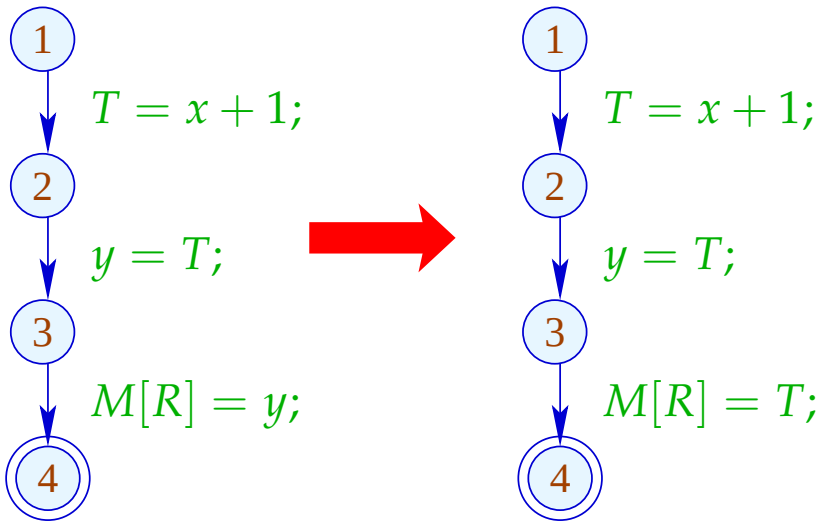


Offenbar ist die Umspeicherung nutzlos :-(

Statt y könnten wir auch T abspeichern :-)

1.3 Beseitigung überflüssiger Umspeicherungen

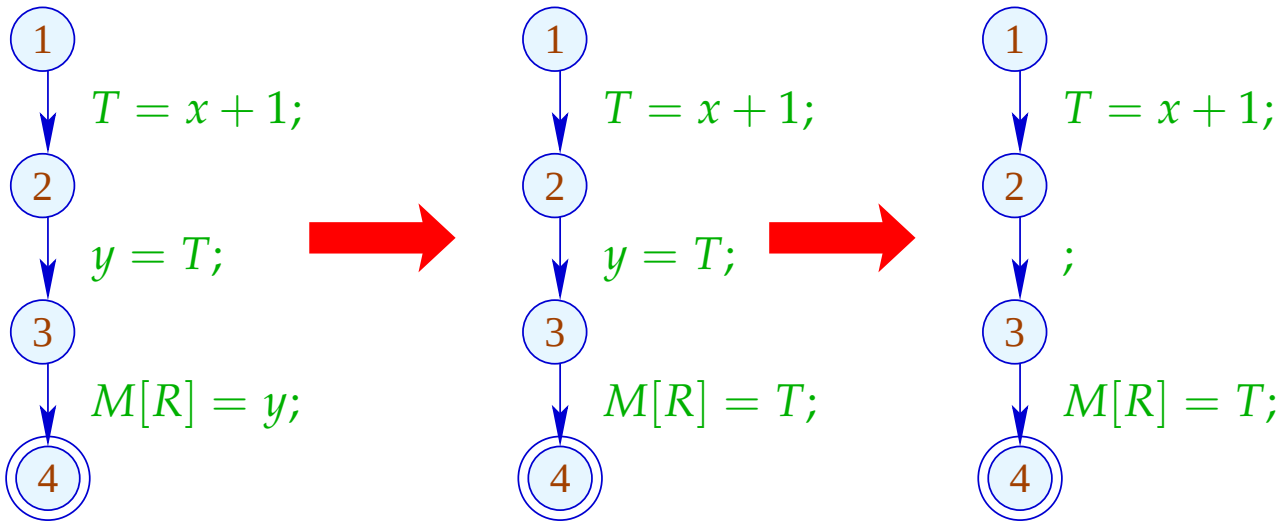
Beispiel:



Vorteil: Jetzt ist y tot :-))

1.3 Beseitigung überflüssiger Umspeicherungen

Beispiel:



Vorteil: Jetzt ist y tot :-))

Idee:

Für jeden Ausdruck merken wir uns die Variablen, die gegenwärtig seinen Wert enthalten :-)

Wir benutzen: $\mathbb{V} = \mathit{Expr} \rightarrow 2^{\mathit{Vars}}$ ...

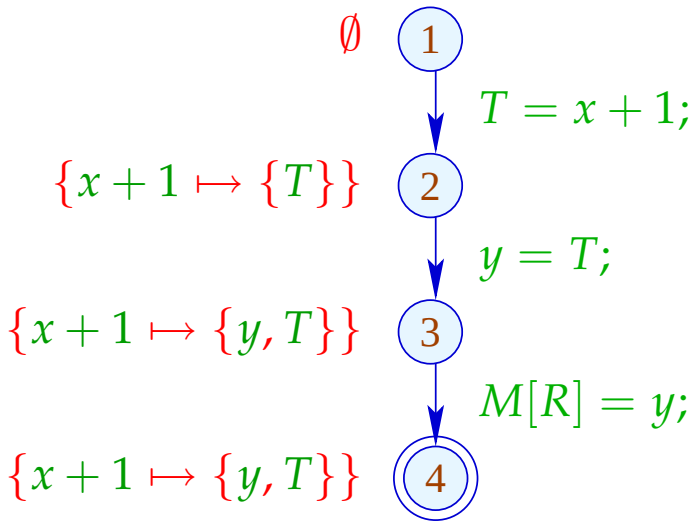
Idee:

Für jeden Ausdruck merken wir uns die Variablen, die gegenwärtig seinen Wert enthalten :-)

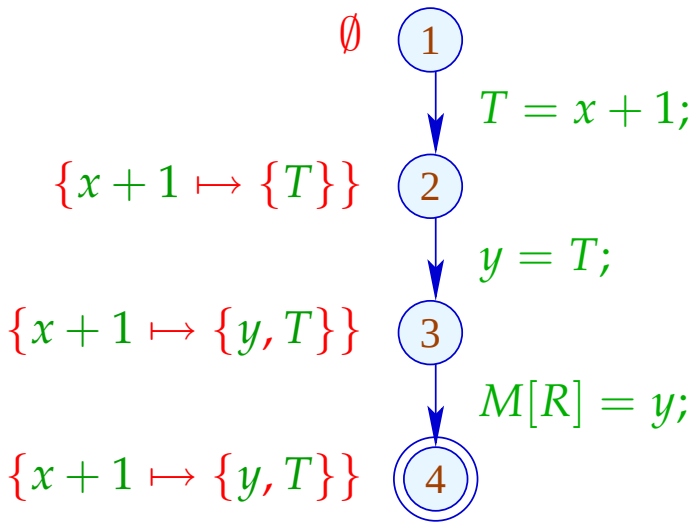
Wir benutzen: $\mathbb{V} = \mathit{Expr} \to 2^{\mathit{Vars}}$ und definieren:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![;]\!]^\sharp\, V & = & V \\
[\![\mathrm{Pos}(e)]\!]^\sharp\, V & = & [\![\mathrm{Neg}(e)]\!]^\sharp\, V \;=\; V \\
[\![x = e;]\!]^\sharp\, V\, e' & = & \begin{cases} \{x\} & \text{falls} \quad e' = e \\ (V\, e')\backslash\{x\} & \text{sonst} \end{cases} \\
[\![x = y;]\!]^\sharp\, V\, e & = & \begin{cases} (V\, e) \cup \{x\} & \text{falls} \quad y \in V\, e \\ (V\, e)\backslash\{x\} & \text{sonst} \end{cases} \\
[\![x = M[R];]\!]^\sharp\, V\, e & = & (V\, e)\backslash\{x\} \\
[\![M[R_1] = R_2;]\!]^\sharp\, V & = & V
\end{array}
$$

Im Beispiel:



Im Beispiel:



→ Wir propagieren die Information vorwärts :-)

An *start* haben wir $V_0\, e = \emptyset$ für alle e

→ $\sqsubseteq \subseteq \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ definieren wir durch:

$$V_1 \sqsubseteq V_2 \quad \text{gdw.} \quad V_1\, e \quad \supseteq \quad V_2\, e \qquad \text{für alle} \quad e$$

Beobachtung:

Die neuen Kanten-Effekte sind distributiv:

Dazu zeigen wir, dass die folgenden Funktionen distributiv sind:

(1) $f_1\, V\, e = (V\, e) \backslash \{x\}$

(2) $f_2\, V = V \oplus \{e \mapsto \{x\}\}$

(3) $f_3\, V\, e = (y \in V\, e)\, ?\, (V\, e \cup \{x\}) : ((V\, e) \backslash \{x\})$

Offenbar gilt:

$$\begin{array}{lcl} [\![x = e;]\!]^\sharp & = & f_2 \circ f_1 \\ [\![x = y;]\!]^\sharp & = & f_3 \\ [\![x = M[R];]\!]^\sharp & = & f_1 \end{array}$$

Distributivität ist unter Komposition abgeschlossen. Damit folgt die Behauptung :-))

(1) Für $f\,V\,e = (V\,e)\backslash\{x\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
f\,(V_1 \sqcup V_2)\,e &= ((V_1 \sqcup V_2)\,e)\backslash\{x\} \\
&= ((V_1\,e) \cap (V_2\,e))\backslash\{x\} \\
&= ((V_1\,e)\backslash\{x\}) \cap ((V_2\,e)\backslash\{x\}) \\
&= (f\,V_1\,e) \cap (f\,V_2\,e) \\
&= (f\,V_1 \sqcup f\,V_2)\,e \qquad \text{:-)}
\end{aligned}$$

(2) Für $f\,V = V \oplus \{e \mapsto a\}$ gilt:

$$
\begin{array}{lcll}
f\,(V_1 \sqcup V_2)\,e' & = & ((V_1 \sqcup V_2) \oplus \{e \mapsto a\})\,e' & \\
& = & (V_1 \sqcup V_2)\,e' & \\
& = & (f\,V_1 \sqcup f\,V_2)\,e' & \text{sofern} \quad e \neq e' \\
\\
f\,(V_1 \sqcup V_2)\,e & = & ((V_1 \sqcup V_2) \oplus \{e \mapsto a\})\,e & \\
& = & a & \\
& = & ((V_1 \oplus \{e \mapsto a\})\,e) \cap ((V_2 \oplus \{e \mapsto a\})\,e) & \\
& = & (f\,V_1 \sqcup f\,V_2)\,e & \text{:-)}
\end{array}
$$

(3) Für $f\,V\,e = (y \in V\,e)\,?\,(V\,e \cup \{x\})\,:\,((V\,e)\backslash\{x\})$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f\,(V_1 \sqcup V_2)\,e &= (((V_1 \sqcup V_2)\,e)\backslash\{x\}) \cup (y \in (V_1 \sqcup V_2)\,e)\,?\,\{x\} : \emptyset \\
&= ((V_1\,e \cap V_2\,e)\backslash\{x\}) \cup (y \in (V_1\,e \cap V_2\,e))\,?\,\{x\} : \emptyset \\
&= ((V_1\,e \cap V_2\,e)\backslash\{x\}) \cup \\
&\quad ((y \in V_1\,e)\,?\,\{x\} : \emptyset) \cap ((y \in V_2\,e)\,?\,\{x\} : \emptyset) \\
&= (((V_1\,e)\backslash\{x\}) \cup (y \in V_1\,e)\,?\,\{x\} : \emptyset) \cap \\
&\quad (((V_2\,e)\backslash\{x\}) \cup (y \in V_2\,e)\,?\,\{x\} : \emptyset) \\
&= (f\,V_1 \sqcup f\,V_2)\,e \qquad\qquad :\text{-)}
\end{aligned}
$$

Wir schließen:

$\rightarrow$ Lösen des Ungleichungssystems liefert die MOP-Lösung :-)

$\rightarrow$ Sei $\mathcal{V}$ diese Lösung.

Gilt $x \in \mathcal{V}[u]\, e$, enthält x an u den Wert von e — welchen wir in T_e abgespeichert haben

$\Longrightarrow$

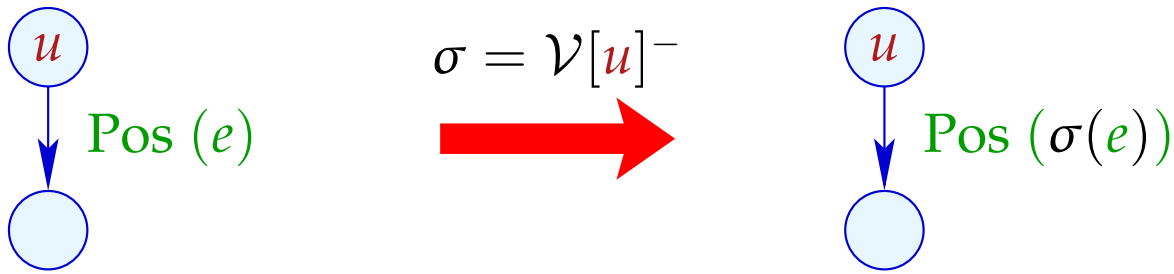
der Zugriff auf x kann durch Zugriff auf T_e ersetzt werden :-)

Für $V \in \mathbb{V}$ sei V^- die Variablen-Substitution mit:

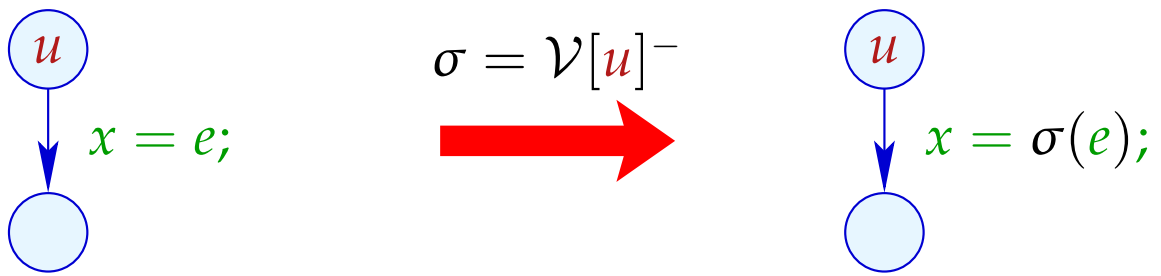
$$V^-\, x \;=\; \begin{cases} T_e & \text{falls } x \in V\, e \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

falls $V\,e \cap V\,e' = \emptyset$ für $e \neq e'$. Andernfalls: $V^{-}\,x = x$:-)

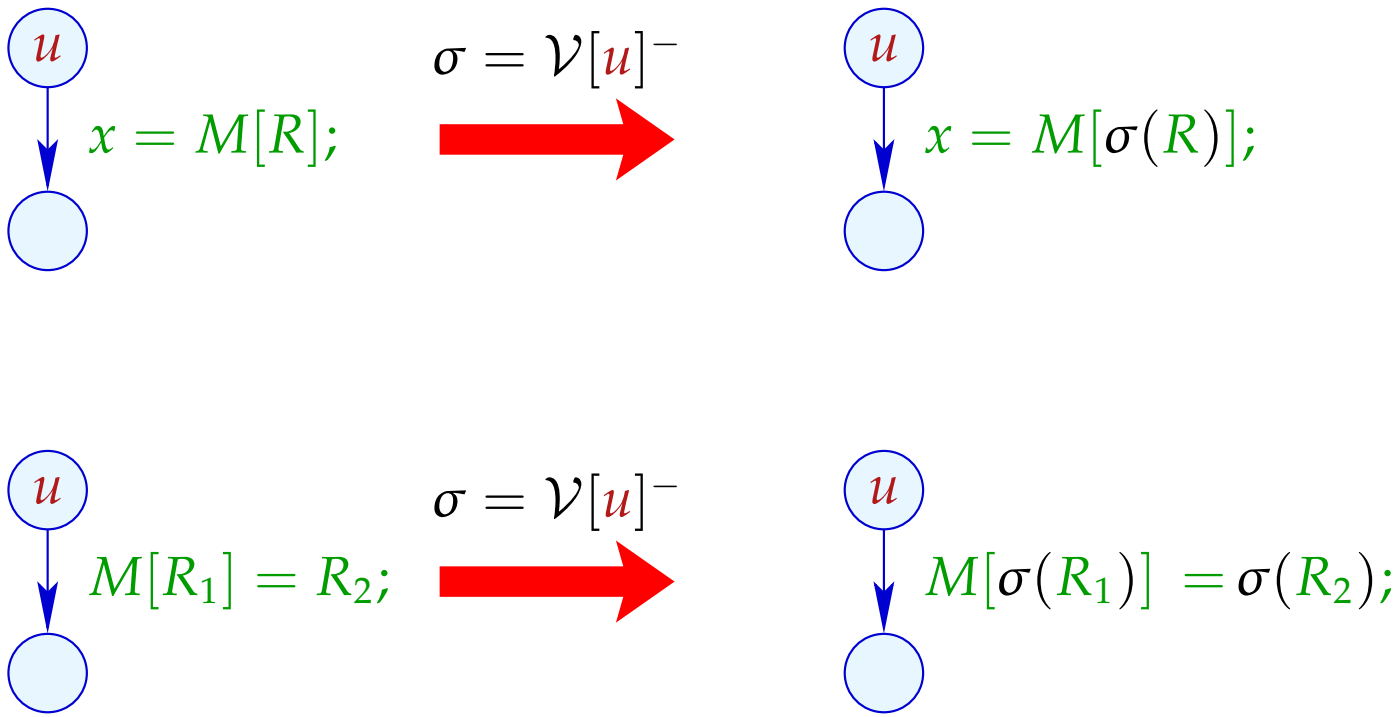
Transformation 4:



... analog für Kanten mit Neg (e)



Transformation 4 (Forts.):



Vorgehen insgesamt:

(1) Verfügbarkeit von Ausdrücken: T1 + T2

- \+ verringert arithmetische Operationen
- – fügt überflüssige Umspeicherungen ein

(2) Werte von Variablen: T4

- \+ erzeugt tote Variablen

(3) (wahre) Lebendigkeit von Variablen: T3

- \+ beseitigt Zuweisungen an tote Variablen